

TESE DE DOUTORADO

Processos Estocásticos não-Markovianos  
em Difusão Anômala

Marcelo Felisberto de Lima

MARCELO FELISBERTO DE LIMA

Processos Estocásticos não-Markovianos  
em Difusão Anômala

Tese apresentada ao Instituto de Física  
da Universidade Federal de Alagoas, como  
pré-requisito para obtenção do título de  
Doutor em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Madras Viswanathan Gandhi Mohan

Maceió - Alagoas - Brasil

15 de dezembro de 2011

*Instituto de Física - UFAL*

**Catlogação na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

**Bibliotecária Responsável: Fabiana Camargo dos Santos**

L732p Lima, Marcelo Felisberto.  
Processos estocásticos não-markovianos em difusão anômala / Marcelo Felisberto Lima. – 2011.  
110 f. : il., graf.

Orientador: Madras Viswanathan Gandhi Mohan.  
Tese (Doutorado em Física da Matéria Condensada) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Física. Maceió, 2011.

Bibliografia: f. 104-110.

1. Markov, Processos de. 2. Difusão anômala. 3. Caminhada de Alzheimer. 4. Persistência amnesicamente induzida. I. Título.

CDU: 538.9:519.246

**PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE**  
**TESE DE DOUTORADO**

**“Processos Estocásticos não-Markovianos em Difusão Anômala”**

por

**Marcelo Felisberto de Lima**

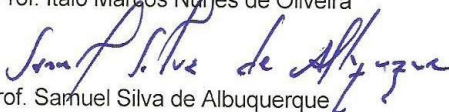
A Banca Examinadora composta pelos professores Madras Viswanathan Gandhi Mohan (orientador), do Departamento de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Glauber José Ferreira Tomaz da Silva, do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Ítalo Marcos Nunes de Oliveira do Instituto de Física da Universidade Federal de Alagoas, Samuel Silva de Albuquerque, do Departamento de Física da Universidade Federal de Alagoas/Campus do Agreste/Arapiraca e Fábio Marcel Zanetti do Departamento de Física da Universidade Federal de Alagoas/Campus do Agreste/Arapiraca, consideram o candidato aprovado com grau “A”.

Maceió, 15 de dezembro de 2011

  
Prof. Madras Viswanathan Gandhi Mohan

  
Prof. Glauber José Ferreira Tomaz da Silva

  
Prof. Ítalo Marcos Nunes de Oliveira

  
Prof. Samuel Silva de Albuquerque

  
Prof. Fábio Marcel Zanetti

Dedico este trabalho aos meus pais, familiares  
e amigos, peças fundamentais na minha formação  
e opção profissional.

## AGRADECIMENTOS

Talvez de todo trabalho esta seja a parte mais difícil. Foram tantas as coisas importantes, pessoas importantes, momentos importantes. É difícil, pois é aqui onde posso lembrar desses inúmeros acontecimentos, alguns eventuais e outros não, mas todos prazerosos. Todos com uma imensurável parcela de contribuição. Tantos anos que até parece uma longa batalha contra meus próprios demônios (Carl Sagan). Se não fossem meus pais Luis A. Felisberto e Hilda Nicolau eu nunca conseguiria. Meus pais, um símbolo de apoio incondicional.

Um fim da exposição à autonomia alheia (Paulo Freire). Apesar de tantas dificuldades, nunca perdi meu foco, eu sempre soube o que quis. A pior das lutas foi comigo mesmo, tantas decepções, frustrações, raiva, depressão, enfim, eu não podia perder o foco. Eu não perdi o foco! O que me metia em encrenca não era aquilo que eu não sabia, mas o que eu sabia com certeza que não era verdade (Mark Twain). Após tudo, minhas convicções permanecem inalteráveis, eu continuo fiel as minhas convicções. As circunstâncias passadas nunca me fizeram mudar. Se este processo conseguiu algo, foi reforçar minha determinação na verdade e no meu amor pela Física.

Minhas bases estão em minha família, meus pais, meu irmão Eduardo Felisberto, minha irmã Patricia Kelda, meus avós, tios e tias, juntos somos uma pedra. Juntos nós crescemos, juntos nós prosperamos. Em memória de meus avôs, Antônio Nicolau, Luis Felisberto e minha avó Iracema Matos dos Santos.

É impossível esquecer, meus saudosos amigos-irmãos, amigos e grandes amigos: Jadielson, Paulo, Jorge, Agnaldo, Bebeto, Ricardo, Ildemir, Angélica, Cícero, Fred, Maritza, Adriana, Ingrid, Wedja, Manu, Rany, Elder, Willamys, Adelino, Caio,

Gabé, Isa, Elton, Adriano, Juarez e a meus novos amigos(as) no Campus do Sertão Lilian, Fernando, Gutembergue, Camila. Lembrando também dos meus amigos dos inspiradores tempos de Clube de Estudos Astronômicos de Alagoas (CEAAL), prof. Adriano Albert, Romualdo, Alexandra e Fábio. Todos muito importantes nesse processo de construção de nossos sonhos.

Alguns professores tiveram importância fundamental em minha formação, Prof<sup>o</sup>. Dr. M. V. Gandhi Mohan, prof<sup>a</sup> MSc. Cristina Helminster, Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Solange Bessa, Prof<sup>o</sup>. Dr. Roberto Jorge, Prof<sup>o</sup>. Dr. Jenner Bastos, Prof<sup>o</sup>. Dr. Kleber Serra, Prof<sup>o</sup>. MSc. Ornelas, Prof<sup>o</sup>. Dr. Evandro Gouveia me ajudaram a ter um pensamento crítico de acordo com os rigores que a Física necessita. Frente a tantas adversidades, isso significou uma parte considerável de minha formação e manutenção de meu foco.

Não posso esquecer da National Geographic, Discovery e History Channel. Canais muito motivantes. Agradeço também aos órgãos de financiamento de bolsas de estudo Capes e Fapeal, sem este apoio tudo teria sido bem mais complicado, talvez até impossível.

## Resumo

Um clássico problema em física consiste em difusão normal versus anômala. Análise fractal de caminhadas aleatórias com memória, sugere descrever quantitativamente uma fenomenologia complexa observada em economia, ecologia, biologia, e física. Processos Markovianos estão representados em caminhadas aleatórias com memória de curto alcance. Em contraste, memória de longo alcance surge tipicamente em caminhadas não-Markovianas. O caso mais extremo de uma caminhada não-Markoviana corresponde a um processo estocástico com dependência em sua história completa. Estudamos uma proposta recente de caminhada não-Markoviana caracterizada por perda de memória do passado recente e persistência induzida amnesicamente. Apresento resultados analíticos mostrando um diagrama de fase completo, consistindo de 4 fases. *(i)* não-persistente clássico, *(ii)* persistente clássico controlado por feedback positivo, *(iii)* não-persistente log-periódico e *(iv)* persistente log-periódico controlado por feedback negativo. As primeiras duas fases apresentam invariância de escala em simetria contínua. Em compensação, movimento log-periódico apresenta invariância de escala em simetria discreta, com dimensão complexa maior do que a dimensão fractal real. É mostrado evidências de persistência log-periódica não somente estatísticas, mas devido também a auto-similaridade geométrica. Obtivemos os resultados numéricos e analíticos para seis expoentes críticos, que juntos caracterizam completamente as propriedades das transições.



## Abstract

A classic problem in physics concerns normal versus anomalous diffusion. Fractal analysis of random walks with memory aims at quantitatively describing the complex phenomenology observed in economic, ecological, biological and physical systems. Markov processes exhaustively account for random walks with short-range memory. In contrast, long-range memory typically gives rise to non-Markovian walks. The most extreme case of a non-Markovian random walk corresponds to a stochastic process with dependence on the entire history of the system. We study a recently proposed non-Markovian random walk model characterized by loss of memories of the recent past and amnestically induced persistence. We report numerical and analytical results showing the complete phase diagram, consisting of 4 phases, for this system: (i) classical nonpersistence, (ii) classical persistence (iii) log-periodic nonpersistence and (iv) log-periodic persistence driven by negative feedback. The first two phases possess continuous scale invariance symmetry, however log-periodicity breaks this symmetry. Instead, log-periodic motion satisfies discrete scale invariance symmetry, with complex rather than real fractal dimensions. We find for log-periodic persistence evidence not only of statistical but also of geometric self-similarity.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
1.1	Algumas propriedades estatísticas . . . . .	7
1.2	Processos de caminhadas aleatórias . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Difusão Normal e Anômala</b>	<b>22</b>
2.1	Introdução . . . . .	22
2.2	Difusão de Fick . . . . .	24
2.3	Difusão Normal . . . . .	27
2.4	Difusão Anômala . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Caminhadas do Elefante, Amnésia e Alzheimer</b>	<b>64</b>
3.1	Introdução . . . . .	64
3.2	Caminhada do elefante . . . . .	65
3.3	Persistência amnesicamente induzida . . . . .	70
3.4	Equação de Fokker-Planck (EFP) . . . . .	81
<b>4</b>	<b>Exponentes críticos: resultados exatos</b>	<b>86</b>
4.1	Introdução . . . . .	86
4.2	Primeiro momento: frequência log-periódica . . . . .	90

SUMÁRIO	2
4.3 Segundo momento: expoente de Hurst . . . . .	92
4.4 Monofractalidade log-periódica . . . . .	94
<b>5 Conclusões e Perspectivas</b>	<b>97</b>
<b>6 Apêndice</b>	<b>99</b>
6.1 Frequências log-periódicas . . . . .	99
6.2 Feedback negativo: $p < 1/2$ . . . . .	102
6.3 Feedback positivo: $p > 1/2$ . . . . .	109
<b>Referências</b>	<b>112</b>

# Capítulo 1

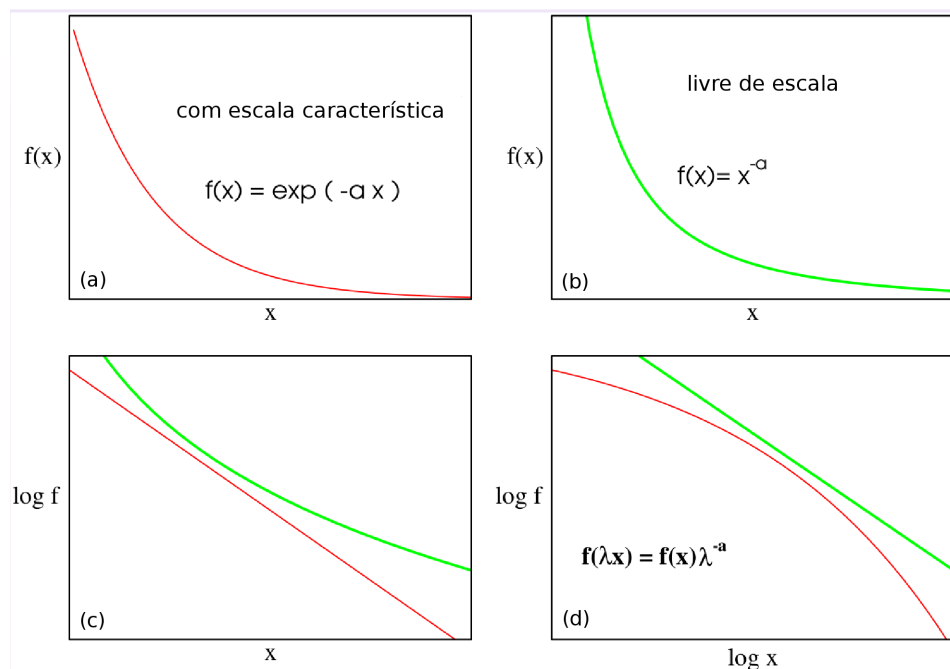
## Introdução

No nível macroscópico, conjuntos de elementos individuais realizando trajetórias aleatórias apresentam grande regularidade em seu comportamento e seguem leis dinâmicas bem definidas [1, 2]. Um problema clássico em física consiste em difusão normal versus anômala. Originalmente proposto no contexto do movimento Browniano [1] e flutuações de preço [3], a análise fractal de caminhadas aleatórias com memória sugere descrever quantitativamente uma fenomenologia complexa observada em economia, sociologia, ecologia e biologia [4, 5, 6, 7, 8, 9].

Dois importantes conceitos em física é o de *scaling* e universalidade[4]. Estes conceitos dizem-nos como sistemas complexos formados da interação de subunidades devem se comportar. Estes pilares conceituais foram construídos com o estudo do comportamento de um sistema próximo ao ponto crítico. O modelo de Ising ajuda a contextualizar o problema e estabelecer as principais ideias sobre *scaling* e universalidade. O modelo de Ising é definido como um conjunto de *spins* clássicos localizados em sites de uma rede. Cada *spin* pode estar orientado para cima ou para

baixo. As orientações dos *spins* podem ser correlacionadas ou não. Entretanto, a correlação  $C(r)$  entre as subunidades separadas por uma distância  $r$  devem decair exponencialmente com  $r$ . Assim,  $C(r) \sim e^{-r/\xi}$ , onde  $\xi$  representa o comprimento de correlação. Experimentos e cálculos em modelos matemáticos confirmam que a correlação, de fato, decai exponencialmente, enquanto que no ponto crítico, o rápido decaimento exponencial se transforma num decaimento lei de potência da forma  $C(r) \sim r^{1-\eta}$  em uma dimensão, onde  $\eta$  é chamado de expoente crítico (em  $d$  dimensões, temos  $C(r) \sim r^{2-d-\eta}$ ). Se correlações decaem com funções lei potência, é dito que o sistema é livre de escala (*scale free*), pois não há escala característica associada com uma lei de potência [9], (Figura 1.1).

Figura 1.1: (a) Funções que possuem escala característica bem definidas possuem momentos finitos. (b) Funções lei de potência possuem momentos divergentes e invariância de escala (características de fractais). (c) Exponenciais apresentam linearidade em gráficos mono-log, enquanto (d) leis de potência são lineares em gráficos duplo-log [9].



É encontrado empiricamente, que expoentes críticos, como  $\eta$ , dependem principalmente da dimensão e das propriedades de simetria do sistema constituído de subunidades. Decaimento lei de potência surge primariamente da multiplicidade das interações entre caminhos que conectam dois *spins* em dimensões maiores do que um. Embora a correlação ao longo de cada caminho diminua exponencialmente com o comprimento do caminho, o número de caminhos cresce exponencialmente. Assim, o decaimento lei de potência emerge da competição entre esses dois efeitos exponenciais [9]. A universalidade conota o fato de que sistemas completamente diferentes comportam-se de forma semelhantes próximos a seus respectivos pontos críticos, pois próximo aos pontos críticos, o que importa mais não são os detalhes das interações microscópicas, mas a natureza dos caminhos [9].

É bem conhecido que expoentes críticos são essenciais para determinar o comportamento de quantidades físicas próximas a transição de fase. Os aspectos universais do sistema são melhor entendidos através de sua determinação exata. Isto é mais dramático em baixas dimensões por exigir um tratamento matemático maior, uma vez que para altas dimensões os expoentes críticos podem ser obtidos por meio da teoria de campo médio. A caracterização completa de uma transição de fase pode ser alcançada pela determinação de seus expoentes críticos [4, 10].

Um processo que fornece valores aleatórios para uma variável que representa posição gera o que é conhecido como uma caminhada aleatória. Processos de caminhadas aleatórias estão estabelecidos na física estatística no propósito de modelar diversos tipos de fenômenos [11, 12, 13, 14, 15, 16]. Estes fenômenos podem ser correlacionados ou não, podendo apresentar comportamentos peculiares de difusão. Caminhadas são mudanças de posição ao longo do tempo. A distância entre duas

---

sucessivas posições é chamada de passo ou deslocamento. Quando há persistência na direção dos passos a caminhada é correlacionada, caso contrário a caminhada é puramente aleatória. Em caminhadas, a correlação tem uma importante influência na distribuição de probabilidade das variáveis aleatórias. O grau de dependência de uma variável com a outra, ou o quanto relacionadas estão, pode mudar a forma da distribuição de probabilidade destas. Este grau de dependência é conhecido como correlação entre as variáveis. A correlação existente entre os ângulos de sucessivos vetores de passo numa caminhada aleatória pode alterar a distribuição dos passos, levando a um processo de difusão anômala. Difusão é uma característica intrínseca aos processos de caminhadas aleatórias, surgindo quando o deslocamento médio quadrático escala com potências do tempo [17, 18, 19, 20], ou seja

$$\langle x(t)^2 \rangle \sim t^{2H}, \quad (1.1)$$

onde  $H$  é o expoente de Hurst, para  $H = 1/2$  a difusão é normal e a distribuição de probabilidade da posição é tipicamente Gaussiana. Este tipo de difusão possui correlação apenas para um número finito de passos, assim como ocorre nos processos Markovianos. Uma caminhada Markoviana é aquela que depende estritamente de um número  $n$  finito de passos anteriormente dado [21, 22]. Sendo que, para  $H \neq 1/2$  a difusão recebe o nome de anômala, originando caminhadas com características superdifusivas ( $H > 1/2$ ) ou subdifusivas ( $H < 1/2$ ) e distribuições de probabilidade do tipo lei de potência [23, 24, 25, 26, 27]. Ao contrário de uma caminhada Markoviana, uma caminhada com correlação de longo alcance é uma das características de uma caminhada não-Markoviana.

Nesta tese estudamos propriedades de escala em caminhadas aleatórias unidimensionais. Apresentamos no capítulo 2 os formalismos necessários para o estudo de difusão normal e anômala. No capítulo 3 investigamos como o expoente  $H$  do deslocamento quadrático médio se comporta em relação aos parâmetros de *feedback*  $p$  e alcance de memória  $f$ , ao ser incluído uma escala de memória variável. Curiosamente, perda de memória do passado recente e distante em caminhadas aleatórias fizeram surgir diversas fases (ou regimes). Cada fase apresenta uma característica distinta, variando entre difusão anômala log-periódica, difusão normal log-periódica, difusão normal e anômala. No capítulo 4 investigamos seis expoentes críticos a fim de entender as transições por completo existentes entre os regimes. Derivamos a equação de Fokker-Planck para tempo não local ao incluir os efeitos de perda de memória recente e analisamos se o fenômeno é multi-fractal ou mono-fractal [28, 29].

## 1.1 Algumas propriedades estatísticas

A Função Densidade de Probabilidade (FDP) possui todas as informações importantes para o estudo de eventos probabilísticos. O comportamento de variáveis aleatórias é regido por sua distribuição de probabilidades. Variáveis aleatórias são resultados numéricos de grandezas não determinísticas. Um evento é dito aleatório se é praticamente impossível de ser previsto a partir de seu estágio inicial. Quando o evento aleatório depende do tempo, temos que a variável aleatória é estocástica, e distribuições de probabilidades dependentes do tempo são requeridas. Quando a menor diferença entre dois possíveis valores de suas realizações for um número



inteiro, a variável aleatórias é dita ser discreta. Mas, quando a variável assume todos os valores intermediários entre um valor real  $a$  e um valor  $b$ , ela é dita ser contínua. Variáveis aleatórias podem ser dependentes ou independentes, onde o que faz a diferença é o grau de correlação existente entre elas. Variáveis dependentes são ditas estarem correlacionadas e as independentes, livres de correlação. As distribuições de probabilidades são sensíveis a essas correlações. Variáveis aleatórias que satisfazem o teorema do limite central apresentam correlação nula, desta maneira sua FDP é tipicamente gaussiana. Porém, apesar deste ser um caso bastante comum, não é geral, pois existem outros tipos de variáveis aleatórias livres de correlações e que apresentam distribuições de probabilidade tipo lei de potência. São as variáveis de Lévy, que satisfazem o Teorema do Limite Central Generalizado [30, 31]. A probabilidade de obtermos um valor aleatório  $X \in (-\infty, \infty)$  num pequeno intervalo entre  $x$  e  $x + dx$  é denotado por  $f(x)dx$ . Onde  $f(x)$  é chamado de função densidade de probabilidade. A FDP tem que satisfazer a condição de normalização,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \quad (1.2)$$

e o requerimento de não negatividade  $f(x) \geq 0$ . Se estas condições não são verificadas, então  $f(x)$  não pode ser considerada como uma medida probabilística.

O  $n$ -ésimo momento da variável aleatória  $X$  é

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx, \quad (1.3)$$

Variando os valores do expoente  $n$ , temos que para  $n = 0$  recuperamos a condição de normalização Eq.(1.2), para  $n = 1$  temos o valor médio ( $\mu$ ) ou primeiro momento

da distribuição de probabilidade, caracterizando onde a distribuição está centrada. Para  $n = 2$  temos o segundo momento ou variância ( $\sigma^2$ ), correspondendo a dispersão em torno do valor médio  $\mu$ . Analiticamente a dispersão é calculada ao trocar  $x$  por  $x - \mu$ , onde assim, temos a variância,

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2. \quad (1.4)$$

O terceiro momento da distribuição ocorre para  $n = 3$ , e caracteriza a assimetria da distribuição em torno do valor médio. Assimetria positiva significa que a distribuição possui uma calda longa à direita de  $\mu$ . Assimetria negativa corresponde a calda longa à esquerda de  $\mu$ . Para um terceiro momento nulo, temos uma distribuição simétrica em torno do valor médio. A medida de achatamento ou alongamento da distribuição é chamada de curtose, e é obtida para  $n = 4$ . Correspondendo ao momento de quarta ordem, a curtose poder ser positiva (leptocúrtica), onde ocorre achatamento da distribuição, negativa (platicúrtica) quando há o alongamento, ou nula (mesocúrtica) mantendo a simetria da distribuição em torno da média.

Nem todos os processos são caracterizados por uma FDP com variância finita. A distribuição de Cauchy-Lorentz representa processos com variância não finita.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}. \quad (1.5)$$

A função geradora dos momentos de uma variável aleatória  $X$  contínua é dada pela transformada de Laplace da função densidade de probabilidade  $f(x)$

$$\langle e^{tx} \rangle = \int e^{tx} f(x) dx = 1 + t \langle x \rangle + \frac{t^2}{2!} \langle x^2 \rangle + \dots \quad (1.6)$$

temos então, a soma dos momentos da variável aleatória. Assim, o  $n$ -ésimo momento central

$$\langle x^n \rangle = \left. \frac{d^n}{dt^n} \langle e^{tx} \rangle \right|_{t=0}, \quad (1.7)$$

é relativo a  $n$ -ésima derivada da função geradora de momento em  $t = 0$ . Mudando um parâmetro  $t \rightarrow it$ , temos que a função geradora dos momentos é obtida através da função característica. Ou seja, da transformada de Fourier de  $f(x)$ .

$$\begin{aligned} f_F(k) &= \langle e^{ikx} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ikx)^n}{n!} f(x) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{\langle x^n \rangle k^n}{n!}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

onde da condição de normalização temos  $f_F(k=0) = 1$ . Agora, para  $\langle x \rangle$  finito, temos os momentos

$$\langle x \rangle = -i \left. \frac{d}{dk} f_F(k) \right|_{k=0}, \quad (1.9)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2} \left. \frac{d^2}{dk^2} f_F(k) \right|_{k=0}. \quad (1.10)$$

## Teorema do limite central

A rigor, superdifusão surge em uma de duas formas possíveis de violar a condição necessária e suficiente para o teorema do limite central. Se a distribuição para o tamanho dos passos (ou tempo) de uma caminhada aleatória possuir variância

divergente, o teorema do limite central torna-se não aplicável. Este é o caso com caminhadas e voos de Lévy [31, 32] em que o teorema do limite central generalizado fornecerá o comportamento correto. Uma segunda maneira na qual difusão anômala pode surgir, relaciona a presença de correlação entre os passos de uma caminhada aleatória. A presença de correlação viola uma condição necessária e suficiente para assegurar o teorema. O enunciado do teorema do limite central é apresentado a seguir.

**Teorema I:** “*A soma de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (I.I.D.) com média e variância finita converge para uma distribuição Gaussiana*”.

Muitas generalizações para a variância finita existem e não requerem distribuição idêntica, mas incorporam algumas condições que garantem que nenhuma das variáveis exerçam maior influência do que as outras. Duas destas condições são: condição de Lyapunov e a condição de Lindeberg.

Existe também uma generalização devido a Gnedenko e a Kolmogorov, sobre a soma de um número de variáveis aleatórias com distribuição com cauda lei de potência caindo com,  $\frac{1}{|x|^{\alpha+1}}$  com  $0 < \alpha < 2$  e portanto havendo variância infinita. A soma tenderá a uma distribuição estável de Lévy.

A demonstração para o teorema do limite central usando funções características é feita a seguir. Vamos definir  $x_1, x_2, x_3, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (I.I.D.) definidas no mesmo espaço de probabilidades, compartilhando a mesma distribuição, com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Para qualquer variável aleatória  $y$ , com média zero ( $\langle y \rangle = 0$ ) e variância unitária

( $\langle y^2 \rangle = 1$ ), a função característica de  $y$  será:

$$\varphi_y(t) = \langle e^{ity} \rangle = \langle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ity)^n}{n!} \rangle = 1 - \frac{t^2}{2} + \mathcal{O}(t^2), \quad t \rightarrow 0, \quad (1.11)$$

onde  $y_i$  é definido como  $y_i = (x_i - \mu)/\sigma$  e sendo  $z_n$  a soma renormalizada de  $y_i$ , temos

$$z_n = \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sigma\sqrt{n}} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\sqrt{n}}, \quad (1.12)$$

assim, a função característica de  $z_n$  será

$$\varphi_{z_n}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{y_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left[\varphi_y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n, \quad (1.13)$$

logo teremos;

$$\begin{aligned} \left[\varphi_y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n &= \left[1 - \frac{t^2}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[\frac{-t^2}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \left[\frac{-t^2}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^k, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{z_n}(t) &= e^{\frac{-t^2}{2}}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

onde este limite é a função característica de uma distribuição normal. Abaixo, está o cálculo da transformada de Fourier de uma função densidade de probabilidade Gaussiana dependente de  $x$ , mostrando que o resultado é uma função exponencial

$\varphi$  dependente de  $t$ .

$$\begin{aligned}
 \varphi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \left[ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right] dx \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{2itx\sigma^2 - x^2}{2\sigma^2}} dx \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{x}{\sigma} - it\sigma)^2/2} dx \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty - it\sigma}^{\infty - it\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz \\
 &= e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}.
 \end{aligned}$$

Este resultado exige que  $\sigma^2$  seja finito para que  $\varphi$  seja uma Gaussiana. Para o caso de  $\sigma^2 = 1$ , temos que  $\varphi$  será uma distribuição normal, assim como visto na Eq. (1.14).

## Variáveis Estocásticas

Quando as variáveis aleatórias associadas a um evento dependem do tempo é dito que esta variável é estocástica. Considerando um sistema cujas propriedades sejam descritas em termos de uma única variável estocástica  $X$ . Onde  $X$  pode ser a velocidade de uma partícula Browniana, ou o número de partículas em uma caixa, ou o número de pessoas numa avenida. Neste trabalho faremos uso de algumas notações importantes para denotar a densidade de probabilidade para uma variável estocástica  $X$ . Temos que  $P_1(x_1, t_1)$  significa a densidade de probabilidade que a variável estocástica  $X$  tenha valor  $x_1$  no tempo  $t_1$ . Uma outra notação é para

a densidade de probabilidade conjunta  $P_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$  de que a variável  $X$  tenha valor  $x_1$  no tempo  $t_1$  e  $x_2$  no tempo  $t_2$ . E,  $P_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)$  significando a densidade de probabilidade conjunta que  $X$  tenha valor  $x_1$  no tempo  $t_1$ ,  $x_2$  no tempo  $t_2$  e  $x_n$  no tempo  $t_n$ . Uma outra notação é  $P_{1|1}(x_1, t_1|x_2, t_2)$  significando a densidade de probabilidade condicional para que a variável  $X$  tenha valor  $x_2$  no tempo  $t_2$  dado que ela tinha valor  $x_1$  no tempo  $t_1$ . As densidades de probabilidade conjunta e condicional são positivas e normalizadas de acordo com a teoria geral de probabilidades [30], Eq. (1.2).

## 1.2 Processos de caminhadas aleatórias

O problema da caminhada aleatória ilustra um resultado fundamental da teoria de probabilidades. Do ponto de vista da física estatística, é sempre necessário considerar um *ensemble* consistindo de um número grande de sistemas igualmente preparados. A probabilidade de ocorrência de um evento particular é então definido com respeito a esse *ensemble* particular [33]. A seguinte discussão consiste em uma caminhada aleatória realizada por um caminhante onde cada passo possui tamanhos iguais  $l$ , e a cada unidade de tempo um passo é dado em alguma direção. Por simplicidade e sem perda de generalidade, podemos supor uma caminhada aleatória unidimensional. A probabilidade de um passo ser dado para a direita é  $p$ , enquanto a probabilidade deste ser para a esquerda é  $1 - p = q$ . Em um caso mais simples é possível ter  $p = q$ , porém, em geral  $p \neq q$ . A localização deste caminhante, no eixo- $x$  será  $x = ml$ , onde  $m$  é um inteiro (positivo, negativo, ou zero). Nós esta-

mos interessados em saber que após  $N$  passos, qual a probabilidade do caminhante estar localizado na posição  $x = ml$ ? Este problema assemelha-se a diversos outros problemas, tais como o magnetismo de átomos com spin  $\pm 1/2$ , a difusão de uma molécula (ou partícula) em um fluido, taxa cambial nos mercados financeiros, entre outros. A rigor, temos uma partícula movendo-se através de sucessivos passos em uma dimensão, cada um de comprimento  $l$ . Após um total de  $N$  passos, a partícula se localizará em

$$x = ml , \quad (1.15)$$

onde  $m \in \mathbb{Z}$  e  $-N \leq m \leq N$ . Queremos calcular a probabilidade  $P_N(m)$  de achar a partícula na posição  $x$ , após  $N$  passos. Vamos considerar que sejam dados  $n_1$  passos para direita e  $n_2$  passos para esquerda. Onde

$$N = n_1 + n_2 . \quad (1.16)$$

O deslocamento real é dado por

$$m = n_1 - n_2 . \quad (1.17)$$

Sabendo que em alguma sequência de  $N$  passos a partícula realizou  $n_1$  passos para a direita, então o deslocamento real, a partir da origem é determinado por

$$\begin{aligned} m &= n_1 - n_2 = n_1 - (N - n_1) \\ &= 2n_1 - N. \end{aligned} \quad (1.18)$$



Uma consideração importante é que os sucessivos passos sejam estatisticamente independentes um do outro. Assim, é possível afirmar que, seja qual for a história passada, cada passo é caracterizado por sua respectiva probabilidade [33]. Agora, a probabilidade de qualquer sequência de  $n_1$  passos para direita e  $n_2$  para esquerda é dada pelo produto das respectivas probabilidades

$$\underbrace{ppp \cdots pp}_{n_1 \text{ fatores}} \overbrace{qqq \cdots qq}^{n_2 \text{ fatores}} = p^{n_1} q^{n_2} . \quad (1.19)$$

Um fato importante é que existem muitas maneiras de realizar  $N$  passos de direções alternadas. O número de possibilidades distintas é dado por

$$\frac{N!}{n_1!n_2!} = \frac{N!}{n_1!(N - n_1)!} . \quad (1.20)$$

Assim, a probabilidade  $W_N(n_1)$  de realizar, em um total de  $N$  passos,  $n_1$  passos para a direita e  $n_2$  passos para esquerda em qualquer ordem, é obtida multiplicando a probabilidade desta sequência pelo número de possíveis sequências de tais passos. Ou seja,

$$\begin{aligned} W_N(n_1) &= \frac{N!}{n_1!n_2!} p^{n_1} q^{n_2} \\ &= \frac{N!}{n_1!(N - n_1)!} p^{n_1} q^{(N - n_1)} . \end{aligned} \quad (1.21)$$

Da condição de normalização, temos

$$\sum_{n=0}^N W_N(n_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N!}{n_1!n_2!} p^{n_1} q^{n_2} = 1 . \quad (1.22)$$

A função de probabilidade mostrado na Eq. (1.21) é chamada distribuição binomial, pela razão que a Eq. (1.20) representa um termo típico encontrado na expansão de  $(p + q)^N$  pelo teorema binomial. Ou seja,

$$(p + q)^N = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N!}{n_1!n_2!} p^{n_1} q^{n_2} . \quad (1.23)$$

A probabilidade  $P_N(m)$  da partícula ser encontrada na posição  $m$  após  $N$  passos, é o mesmo que  $W_N(n_1)$ , isto é,

$$P_N(m) = W_N(n_1) . \quad (1.24)$$

Das Eq. (1.16) e (1.17), achamos

$$n_1 = \frac{(N + m)}{2}, \quad n_2 = \frac{(N - m)}{2} . \quad (1.25)$$

Substituindo estas relações na Eq. (1.21), teremos

$$P_N(m) = \frac{N!}{[\frac{1}{2}(N + m)]![\frac{1}{2}(N - m)]!} p^{(N+m)/2} (1 - q)^{(N-m)/2} . \quad (1.26)$$

Calculando os valores médios  $\langle n_1 \rangle$  e  $\langle n_2 \rangle$

$$\begin{aligned} \langle n_1 \rangle &= \sum_{n_1=0}^N n_1 W_N(n_1) \\ &= \sum_{n_1=0}^N n_1 \frac{N!}{n_1!(N - n_1)!} p^{n_1} q^{(N-n_1)} , \end{aligned} \quad (1.27)$$

usando,

$$n_1 p^{n_1} = p \frac{\partial}{\partial p} (p^{n_1}) , \quad (1.28)$$

obtemos,

$$\begin{aligned} \langle n_1 \rangle &= \sum_{n_1=0}^N \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} (n_1 p^{n_1}) q^{(N-n_1)} \\ &= \sum_{n_1=0}^N \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} \left[ p \frac{\partial}{\partial p} (p^{n_1}) \right] q^{(N-n_1)} \\ &= p \frac{\partial}{\partial p} \left[ \sum_{n_1=0}^N \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{(N-n_1)} \right] \\ &= p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N \\ &= pN(p+q)^{N-1} \\ &= pN , \end{aligned} \quad (1.29)$$

logo,  $\langle n_1 \rangle = pN$  e resolvendo da mesma maneira temos  $\langle n_2 \rangle = qN$ . É necessário verificar que,

$$\langle n_1 \rangle + \langle n_2 \rangle = pN + qN = N(p+q) = N , \quad (1.30)$$

e também,

$$\begin{aligned} \langle m \rangle &= \langle n_1 - n_2 \rangle \\ &= \langle n_1 \rangle - \langle n_2 \rangle \\ &= pN - qN \\ &= N(p - q) . \end{aligned} \quad (1.31)$$

Agora calculamos a dispersão quadrática média de  $n_1$

$$\begin{aligned}
 \langle (\Delta n_1)^2 \rangle &= \langle (n_1 - \langle n_1 \rangle)^2 \rangle \\
 &= \langle n_1^2 - 2n_1 \langle n_1 \rangle + \langle n_1 \rangle^2 \rangle \\
 &= \langle n_1^2 \rangle - \langle 2n_1 \langle n_1 \rangle \rangle + \langle \langle n_1 \rangle^2 \rangle \\
 &= \langle n_1^2 \rangle - 2\langle n_1 \rangle \langle n_1 \rangle + \langle n_1 \rangle^2 \\
 &= \langle n_1^2 \rangle - \langle n_1 \rangle^2 .
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

O valor de  $\langle n_1 \rangle$  é dado pela Eq. (1.29), agora calculamos  $\langle n_1^2 \rangle$

$$\begin{aligned}
 \langle n_1^2 \rangle &= \sum_{n_1=0}^N n_1^2 W_N(n_1) \\
 &= \sum_{n_1=0}^N \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} (n_1^2 p^{n_1}) q^{(N-n_1)} ,
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

usando

$$n_1^2 p^{n_1} = \left( p \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 p^{n_1} , \tag{1.34}$$

substituindo na Eq. (1.33)

$$\begin{aligned}
 \langle n_1^2 \rangle &= \sum_{n_1=0}^N \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} (n_1^2 p^{n_1}) q^{(N-n_1)} \\
 &= \sum_{n_1=0}^N \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} \left( p \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 p^{n_1} q^{(N-n_1)} \\
 &= \left( p \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 \sum_{n_1=0}^N \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} p^{n_1} q^{(N-n_1)} \\
 &= \left( p \frac{\partial}{\partial p} \right)^2 (p+q)^N \\
 &= \langle n_1 \rangle^2 + pqN ,
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

logo,

$$\begin{aligned}\langle (\Delta n_1)^2 \rangle &= \langle n_1^2 \rangle - \langle n_1 \rangle^2 \\ &= pqN .\end{aligned}\tag{1.36}$$

Uma boa medida para a largura relativa da distribuição de  $n_1$  é

$$\frac{\sqrt{\langle (\Delta n_1)^2 \rangle}}{\langle n_1 \rangle} = \frac{\sqrt{pqN}}{pN} = \sqrt{\frac{q}{p}} \frac{1}{\sqrt{N}} .\tag{1.37}$$

Note que, a medida que  $N$  aumenta, o valor médio de  $n_1$  também aumenta, entretanto o desvio médio aumenta apenas com  $N^{1/2}$ . E, a dispersão relativa da distribuição diminui a medida que  $N$  aumenta [33].

Nas figuras (1.2) e (1.3) é apresentado uma caminhada aleatória com  $10^6$  passos, e seu respectivo histograma, criado a partir de  $p = 7$ ,  $q = 0,3$  e  $N = 10^5$  realizações de caminhadas aleatórias.

Figura 1.2: Caminhada aleatória unidimensional. Gráfico da posição versus o tempo

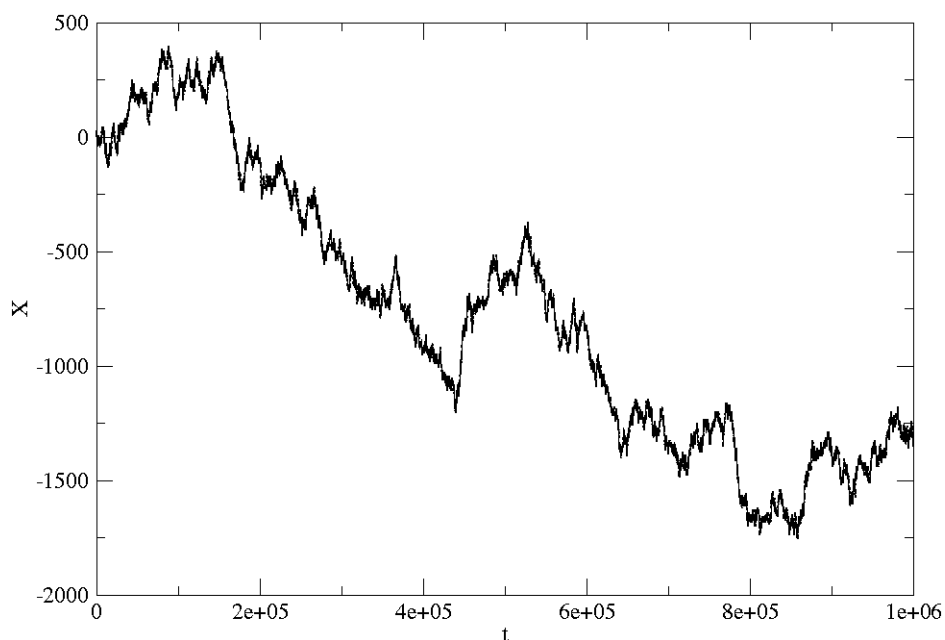
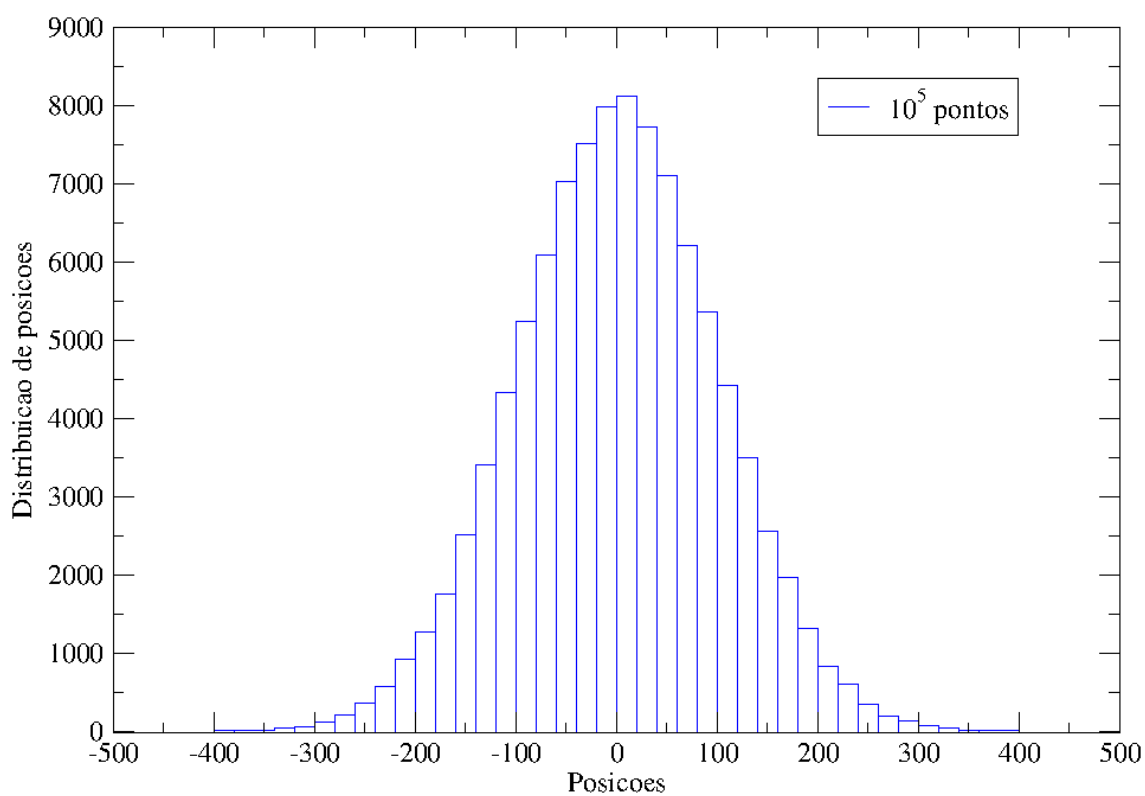


Figura 1.3: Histograma das posições de uma caminhada aleatória unidimensional.



# Capítulo 2

## Difusão Normal e Anômala

### 2.1 Introdução

Difusão governada por funções densidade de probabilidade Gaussiana cuja variância cresce linearmente com o tempo é conhecida como difusão normal. Neste contexto temos o movimento Browniano, uma aplicação de um grande número  $N$  de caminhadas aleatórias independentes e identicamente distribuídas. O movimento Browniano surge do movimento de uma partícula em um meio viscoso, produzindo uma distribuição Gaussiana para o deslocamento da partícula [1, 2, 34]. Neste capítulo é apresentado a introdução de três importantes formalismos para tratar difusão normal, as equações de Langevin [21], Fokker-Planck [22, 35] e Equação Mestra [30, 36].

A equação de Langevin para um caminhante aleatório em um potencial sujeito a uma força estocástica é um formalismo. Esta, é uma equação diferencial estocástica para a velocidade em termos de um ruído, tipicamente um processo de

Wiener [35]. A integração numérica da equação de Langevin leva-nos a trajetória realizada pelo caminhante. Considerando um *ensemble* de caminhadas aleatórias não interagentes, a equação de Langevin leva-nos a equação de Fokker-Planck para a função densidade de probabilidade da posição do caminhante, e este é o segundo formalismo. Um terceiro formalismo para difusão normal consiste no estudo da Equação Mestra (Pauli). O análogo discreto da equação de Fokker-Planck para sistemas contínuos. Descrevendo uma caminhada aleatória através de saltos entre sítios em uma rede. Os três formalismos são formalmente equivalentes, todos descrevem caminhadas Markovianas. Em processos Markovianos, correlações temporais de curto alcance no ruído, podem levar a comportamento balístico em tempos curtos e comportamento difusivo em tempos longos [9].

Em tempos longos, quando difusão não é caracterizada por normal é caracterizada por anômala. E similarmente aos formalismos para tratar difusão normal, apresento neste capítulo os formalismos para o estudo da difusão anômala. Usualmente o expoente  $H$ , conhecido como expoente de Hurst, quantifica como o deslocamento quadrático médio  $\langle x^2 \rangle \sim t^{2H}$  cresce com o tempo  $t$ . Sendo considerado difusão normal quando  $H = 1/2$ , anômala superdifusiva quando  $H > 1/2$  e anômala subdifusiva quando  $H < 1/2$ . Em analogia com difusão normal, existem três importantes formalismos para o estudo da difusão anômala. O mais conhecido é o formalismo para caminhadas aleatórias de tempo contínuo (CATC) [18, 37, 38, 39], proposto por Montroll-Weiss. CATC permitem generalizações dos processos de Wiener, presentes na equação de Langevin, generalizações envolvendo mais distribuições para os tamanhos dos saltos e tempos de espera. Um segundo formalismo para difusão anômala consiste na generalização da equação de Fokker-Planck com deriva-

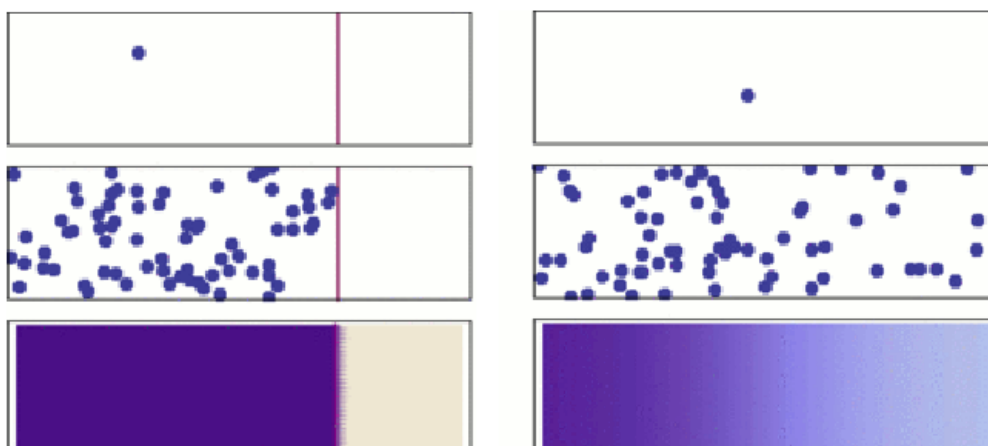


das fracionais no tempo e/ou espaço, caracterizando assim a equação fracionária de Fokker-Planck [18, 40]. A generalização da equação Mestre consiste numa equação para tempo não local e correlação espacial de longo alcance. Sendo assim uma equação que inclui efeitos de memória e sendo portanto, chamada de equação Mestre generalizada [9].

## 2.2 Difusão de Fick

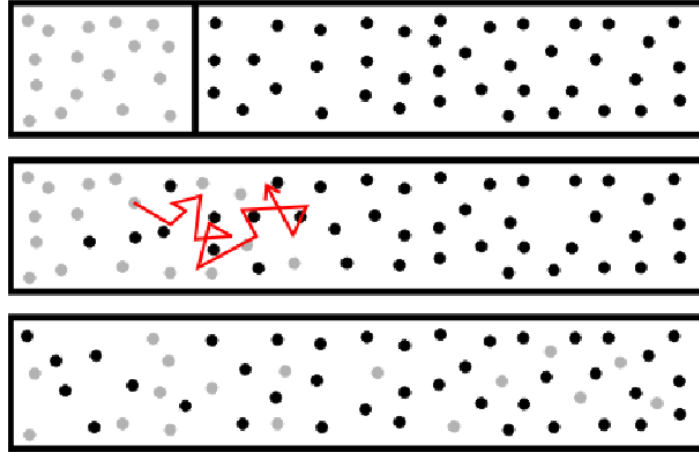
Conceitos importantes no campo de processos difusivos estão fundamentados nas leis de Fick [40, 41]. Como ilustração do fenômeno da difusão, consideremos um recipiente, separado em duas partes por uma parede e contendo um gás, como mostra a Figura 2.1.

Figura 2.1: A difusão do ponto de vista microscópico e macroscópico. O gás parece mover-se suave e sistematicamente das áreas de alta concentração para áreas de baixa concentração, seguindo as leis de Fick [42]. No topo: Uma única molécula move-se aleatoriamente. Centro: Com mais moléculas, há uma tendência clara, na qual o gás espalha-se pelo recipiente mais e mais uniformemente. Abaixo: Com um enorme número de moléculas do gás.



Removendo a parede (Figura 2.2) verifica-se que ambos os gases se difundem

Figura 2.2: Representação de uma mistura de gases difundindo-se aleatoriamente [42].



um dentro do outro e após um certo período é possível constatar que existe uma mistura homogênea. Esse e muitos outros exemplos ilustram uma característica fundamental do processo de difusão.

Vamos chamar de  $n$  o número de moléculas do gás que se difunde, por unidade de volume (ou concentração do gás), esse número deve variar de lugar para lugar a fim de que haja a difusão. A difusão é o resultado do fato da agitação molecular produzir colisões frequentes entre as moléculas que, como consequência, são espalhadas. O número líquido de partículas que cruzam, por unidade de tempo, uma área unitária perpendicular a direção de difusão é conhecido como densidade de corrente  $\vec{j}$ . Verifica-se experimentalmente que existe uma relação de proporcionalidade entre a densidade de corrente e a concentração por unidade de comprimento, isto é,

$$\vec{j} = -D\nabla n, \quad (2.1)$$

onde  $D$  é um coeficiente que depende da substância e é chamado de coeficiente de difusão. O sinal menos indica que o fluxo resultante é na direção em que  $n$  decresce.

A Eq. (2.1) é chamada de lei de Fick e foi sugerida pelo fisiologista alemão Adolf Fick (1829-1901). Para haver difusão, a distribuição espacial das moléculas do gás deve ser não-homogênea. Uma segunda característica é que a difusão se dá na direção em que a concentração decresce e, portanto, a distribuição molecular da substância que se difunde tende a se igualar em todo espaço. Existe uma tendência bem definida para a ocorrência da difusão. Essa tendência, contudo, deve ser considerada de uma maneira estatística em virtude das flutuações locais que podem ocorrer, pois para pequenos intervalos de tempo, poderá haver inversão do fluxo molecular em certos pontos.

Combinando-se a lei de Fick, Eq. (2.1) com a equação da continuidade Eq. (2.2) obtemos uma relação em que aparece somente a concentração Eq.(2.3).

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 . \quad (2.2)$$

Temos a chamada segunda lei de Fick,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla n) . \quad (2.3)$$

Considerando o sistema como um meio isotrópico, o coeficiente de difusão torna-se um escalar  $D$ ,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\nabla^2 n . \quad (2.4)$$

Muitos processos de difusão satisfazem as equações de Fick, exceto quando a concentração  $n$  é extremamente baixa, muito alta, ou varia abruptamente em pequenas distâncias, de forma que a estatística não seja mais aplicável. As equações são

comumente usadas em processos físicos de transporte, calor, dinâmica de populações, entre outras.

## 2.3 Difusão Normal

### Movimento Browniano

Em 1827, o botânico inglês Robert Brown observou que grãos de pólen quando imersos em fluidos apresentam movimento irregular. Com aprimoramentos das técnicas de microscopia, novas observações experimentais revelaram que o fenômeno é bem mais geral, ocorrendo em suspensões de diversos tipos de partículas microscópicas em fluidos não muito viscosos. Estas observações deram início as primeiras teorias sobre movimento do pólen, chamado de movimento Browniano e publicadas independentemente por Einstein (1905) [1] e Smoluchowski (1906), no início do século XX. Os estudos sobre movimento Browniano constituíram um elemento importante para o estabelecimento da estrutura atômica da matéria [2, 21, 43].

### Equação de Langevin

Uma teoria fenomenológica do movimento Browniano é obtida a partir da equação de Newton do movimento para uma partícula massiva e incluir uma força de fricção sistemática e uma força aleatória para reproduzir os efeitos dos muitos graus de liberdade do fluido no qual a partícula está imersa. Dando origem assim,

a equação diferencial de Paul Langevin (1908) do movimento da partícula [21, 22].

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_a(t) + \vec{F} - \alpha \vec{v} . \quad (2.5)$$

onde  $\vec{v}$  é a velocidade de uma partícula de massa  $m$ ,  $\vec{F}$  é uma força externa,  $\alpha$  é o coeficiente de atrito viscoso e  $\vec{F}_a(t)$  é uma força aleatória ou estocástica, representando as incessantes colisões do pólen com as moléculas do fluido. Podemos supor que  $\vec{F}_a(t)$  seja independente da velocidade e varie muito mais rapidamente com o tempo do que a variações de velocidade da partícula.

Simplificando a notação, podemos considerar uma situação unidimensional, com força externa nula. Assim, a equação de Langevin torna-se

$$m \frac{dv}{dt} = F_a(t) - \alpha v , \quad (2.6)$$

dividindo ambos os membros pela massa,

$$\frac{dv}{dt} = A(t) - \gamma v . \quad (2.7)$$

onde  $\gamma = \alpha/m > 0$  é o parâmetro de amortecimento e  $A(t) = F_a(t)/m$ . Para resolver a equação estocástica de Langevin, devemos encontrar a densidade de probabilidade  $p(v, t; v_0)$  de que a partícula esteja com velocidades entre  $v$  e  $v + dv$  no instante de tempo  $t$ , quando  $v = v_0$  no instante  $t = 0$ . Para tempos muito pequenos, devemos ter

$$P(v, t \rightarrow 0; v_0) \rightarrow \delta(v - v_0). \quad (2.8)$$

Para tempos muito grandes, ou seja,  $t \rightarrow \infty$ , devemos recuperar a distri-

buição de Maxwell-Boltzmann, independentemente do valor de  $v_0$ ,

$$P(v, t \rightarrow \infty; v_0) \rightarrow \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}. \quad (2.9)$$

onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura absoluta. De maneira formal, a solução da Eq. (2.7) é dada pela expressão

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma t'} A(t') dt'. \quad (2.10)$$

Em termos de um ensemble de partículas, temos o valor esperado da velocidade

$$\langle v(t) \rangle = v_0 e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma t'} \langle A(t') \rangle dt'. \quad (2.11)$$

Supondo que a força aleatória média seja nula, ou seja,

$$\langle A(t) \rangle = 0, \quad (2.12)$$

obtemos

$$\langle v(t) \rangle = v_0 e^{-\gamma t}. \quad (2.13)$$

Usando as equações (2.10) e (2.13) para calcularmos o valor esperado do desvio quadrático médio da velocidade, vamos escrever

$$\begin{aligned} \Delta v &= v(t) - \langle v(t) \rangle \\ &= [v_0 e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma t'} A(t') dt'] - [v_0 e^{-\gamma t}] \\ &= e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma t'} A(t') dt'. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Assim,

$$\begin{aligned}\langle (\Delta v)^2 \rangle &= \left( e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma t'} A(t') dt' \right) \left( e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma t''} A(t'') dt'' \right) \\ &= e^{-2\gamma t} \int_0^t \int_0^t e^{\gamma(t'+t'')} \langle A(t') A(t'') \rangle dt' dt'' .\end{aligned}\quad (2.15)$$

Considerando que as colisões sejam independentes, temos forças aleatórias delta-correlacionadas,

$$\langle A(t') A(t'') \rangle = \Gamma \delta(t'' - t') , \quad (2.16)$$

onde,  $\Gamma$  é um coeficiente. Com esta consideração, podemos reescrever a equação para o desvio quadrático médio da velocidade,

$$\begin{aligned}\langle (\Delta v)^2 \rangle &= e^{-2\gamma t} \int_0^t \int_0^t e^{\gamma(t'+t'')} \Gamma \delta(t'' - t') dt' dt'' \\ &= e^{-2\gamma t} \int_0^t \Gamma e^{2\gamma t'} dt' \\ &= \frac{\Gamma}{2\gamma} [1 - e^{-2\gamma t}] .\end{aligned}\quad (2.17)$$

Para tempos longos, isto é, no regime estacionário,  $\langle v(t) \rangle = 0$  e o desvio quadrático médio da velocidade torna-se

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\Gamma}{2\gamma} . \quad (2.18)$$

Sabemos, a partir da teoria cinética dos gases para a equipartição da energia, que

$$\frac{1}{2} m \langle v(t)^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T , \quad (2.19)$$

onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann e  $T$  a temperatura absoluta. Comparando a Eq. (2.18) com a Eq. (2.19), obtemos a relação entre o coeficiente  $\Gamma$  e a temperatura:

$$\Gamma = \frac{2\gamma k_B T}{m} . \quad (2.20)$$

Temos portanto, uma expressão fechada para o desvio quadrático médio da velocidade

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle = \frac{k_B T}{m} [1 - e^{-2\gamma t}] . \quad (2.21)$$

O cálculo do valor esperado dos momentos de ordem superior é feito supondo que as forças estocásticas obedeçam as seguintes relações

$$\langle (\Delta v)^{2n+1} \rangle = 0 , \quad (2.22)$$

$$\langle (\Delta v)^{2n} \rangle = 1.3.5\dots(2n-1) \langle (\Delta v)^2 \rangle , \quad (2.23)$$

onde  $n = 1, 2, 3, \dots$ , assegurando a forma Gaussiana da distribuição de probabilidades  $p(v, t; v_0)$ . Verificando a característica Gaussiana da distribuição, é possível utilizar os dois primeiros momentos para escrever

$$\begin{aligned} P(v, t; v_0) &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(v - \langle v \rangle)^2}{2\sigma^2} \right] \\ &= [2\pi \langle (\Delta v)^2 \rangle]^{-1/2} \exp \left[ -\frac{(v - \langle v \rangle)^2}{2 \langle (\Delta v)^2 \rangle} \right] , \end{aligned} \quad (2.24)$$

Substituindo as equações (2.13) e (2.21) na Eq. (2.24), temos,

$$P(v, t; v_0) = \left\{ 2\pi \left[ \frac{k_B T}{m} (1 - e^{-2\gamma t}) \right] \right\}^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{(v - v_0 e^{-\gamma t})^2}{\frac{2k_B T}{m} (1 - e^{-2\gamma t})} \right\} . \quad (2.25)$$



Esta equação é a solução para a dinâmica do movimento Browniano apresentado na equação de Langevin. Fazendo o limite para  $t \rightarrow \infty$ , encontramos a função de Maxwell-Boltzmann, visto na Eq. (2.9).

Por uso de considerações semelhantes, é possível obter a densidade de probabilidade  $P(x, t, x_0)$  de que a solução para os deslocamentos  $x = x(t)$  da partícula esteja entre  $x$  e  $x + dx$  no instante de tempo  $t$ , quando  $x = x_0$  no instante  $t = 0$ . Sabemos que  $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ , então temos,

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t') dt' . \quad (2.26)$$

O deslocamento médio é dado por

$$\langle x(t) \rangle = x_0 + \int_0^t \langle v(t') \rangle dt' . \quad (2.27)$$

substituindo a equação (2.13) na equação acima,

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle &= x_0 + \int_0^t v_0 e^{-\gamma t'} dt' \\ &= x_0 + \frac{v_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) . \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde, o quadrado do deslocamento médio é dado por

$$\begin{aligned} \langle x(t) \rangle^2 &= \left[ x_0 + \frac{v_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \right]^2 \\ &= x_0^2 + \frac{2x_0 v_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) + \frac{v_0^2}{\gamma^2} (1 - e^{-\gamma t})^2 . \end{aligned} \quad (2.29)$$

Calculando o deslocamento quadrático temos,

$$[x(t)^2] = x_0^2 + 2x_0 \int_0^t v(t') dt' + \int_0^t \int_0^t v(t') v(t'') dt' dt'' , \quad (2.30)$$

logo, o deslocamento quadrático médio será,

$$\begin{aligned} \langle [x(t)^2] \rangle &= x_0^2 + 2x_0 \int_0^t \langle v(t') \rangle dt' + \int_0^t \int_0^t \langle v(t') v(t'') \rangle dt' dt'' \\ &= x_0^2 + 2x_0 \int_0^t v_0 e^{-\gamma t'} dt' + \int_0^t \int_0^t \langle v(t') v(t'') \rangle dt' dt'' \\ &= x_0^2 + \frac{2x_0 v_0}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) + \int_0^t \int_0^t \langle v(t') v(t'') \rangle dt' dt'' . \end{aligned} \quad (2.31)$$

Usando as equações (2.10) e (2.16) podemos resolver a integral dupla,

$$\begin{aligned} \langle v(t') v(t'') \rangle &= v_0^2 e^{-\gamma(t'+t'')} + e^{-\gamma(t'+t'')} \int_0^{t'} \int_0^{t''} e^{\gamma(t''+t''')} \langle A(t'') A(t''') \rangle dt'' dt''' \\ &= v_0^2 e^{-\gamma(t'+t'')} + e^{-\gamma(t'+t'')} \int_0^{t'} \int_0^{t''} e^{\gamma(t''+t''')} \Gamma \delta(t''' - t'') dt'' dt''' \\ &= v_0^2 e^{-\gamma(t'+t'')} + e^{-\gamma(t'+t'')} \int_0^{t'} e^{2\gamma t''} dt'' \\ &= v_0^2 e^{-\gamma(t'+t'')} + e^{-\gamma(t'+t'')} \frac{\Gamma}{2\gamma} (e^{2\gamma t'} - 1) \\ &= v_0^2 e^{-\gamma(t'+t'')} + \frac{\Gamma}{2\gamma} [e^{\gamma(t'-t'')} - e^{-\gamma(t'+t'')}] . \end{aligned} \quad (2.32)$$

Agora, substituindo este resultado na Eq. (2.31), encontramos o resultado geral

para o deslocamento quadrático médio

$$\begin{aligned}
\langle [x(t)^2] \rangle &= x_0^2 + \frac{2x_0v_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) + v_0^2 \int_0^t \int_0^t e^{-\gamma(t'+t'')} dt'' dt' \\
&+ \frac{\Gamma}{2\gamma} \int_0^t \int_0^t [e^{\gamma(t'-t'')} - e^{-\gamma(t'+t'')}] dt'' dt' \\
&= x_0^2 + \frac{2x_0v_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) + \frac{v_0^2}{\gamma^2}(1 - e^{-\gamma t})^2 \\
&+ \frac{k_B T}{m\gamma^2} [e^{\gamma t} + 3e^{-\gamma t} - 3 - e^{-2\gamma t}] \\
&= x_0^2 + \frac{2x_0v_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}) + \frac{v_0^2}{\gamma^2}(1 - e^{-\gamma t})^2 \\
&+ \frac{k_B T}{m\gamma^2} [2\gamma t + 4e^{-\gamma t} - 3 - e^{-2\gamma t}] , \tag{2.33}
\end{aligned}$$

onde  $\Gamma = 2k_B T/m$ . Com uso da Eq. (2.29) e da Eq. (2.33) podemos calcular o desvio do deslocamento quadrático médio, ou seja  $\langle (\Delta x)^2 \rangle$ ,

$$\begin{aligned}
\langle (\Delta x)^2 \rangle &= \langle [x(t)]^2 \rangle - \langle x(t) \rangle^2 \\
&= \frac{k_B T}{m\gamma^2} [2\gamma t + 4e^{-\gamma t} - 3 - e^{-2\gamma t}] . \tag{2.34}
\end{aligned}$$

Portanto, encontramos a solução da equação estocástica de Langevin. Onde a densidade de probabilidade do deslocamento é dado pela equação seguinte,

$$P(x, t, x_0) = [2\pi \langle (\Delta x)^2 \rangle]^{-1/2} \exp \left[ -\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\langle (\Delta x)^2 \rangle} \right] . \tag{2.35}$$

Fazendo uso da expansão em série das exponenciais que aparecem nas equações (2.28) e (2.29), podemos observar dois limites interessantes (i)  $\gamma t \ll 1$  e (ii)  $\gamma t \gg 1$ ,

- $\gamma t \ll 1$ , tempos suficientemente pequenos, onde  $t \ll 1/\gamma = m/\alpha$

$$\begin{aligned}
\langle x(t) \rangle &= x_0 + \frac{v_0}{\gamma} \left[ 1 - \left( 1 - \gamma t + \frac{1}{2} \gamma^2 t^2 \right) \right] \\
&= x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} v_0 \gamma t^2 + O(t^3) ,
\end{aligned} \tag{2.36}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle [x(t)]^2 \rangle &= x_0^2 + \frac{2x_0 v_0}{\gamma} \left[ 1 - \left( 1 - \gamma t + \frac{1}{2} \gamma^2 t^2 \right) \right] + \frac{v_0^2}{\gamma^2} \left( \gamma t - \frac{1}{2} \gamma^2 t^2 \right)^2 \\
&= x_0^2 + 2x_0 v_0 t + v_0 (v_0 - x_0 \gamma) t^2 + O(t^3) ,
\end{aligned} \tag{2.37}$$

calculando  $\langle (\Delta x)^2 \rangle$  podemos ver que restam apenas os termos de altas ordens  $O(t^3)$ . Estes resultados estão de acordo com a análise do movimento uniformemente variado realizado pela mecânica clássica, sem inclusão da força aleatória.

- $\gamma t \gg 1$ , tempos suficientemente longos, onde  $t \gg 1/\gamma = m/\alpha$

$$\langle x(t) \rangle^2 \rightarrow x_0^2 + \frac{2x_0 v_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{\gamma^2} , \tag{2.38}$$

e

$$\langle [x(t)]^2 \rangle = x_0^2 + \frac{2x_0 v_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{\gamma^2} + \frac{k_B T}{m\gamma^2} (2\gamma t) , \tag{2.39}$$

a diferença nos dará  $\langle (\Delta x)^2 \rangle$ ,

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle \rightarrow \frac{2k_B T}{m\gamma} t \equiv 2Dt , \tag{2.40}$$

onde, pelo fato de  $\gamma t \gg 1$ , podemos aproximar  $\gamma t - 3 \approx \gamma t$ . Portanto,  $D = k_B T / m\gamma$  é o coeficiente de difusão. Este resultado, deduzido por Einstein [1], é um importante resultado para processos estocásticos, indicando a natureza estocástica do movimento Browniano. O desvio quadrático médio do deslocamento é proporcio-

nal à raiz quadrada do tempo decorrido. Para tempos suficiente longos, podemos escrever a densidade de probabilidade como sendo,

$$P(x, t; x_0, v_0) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp \left[ -\frac{(x - x_0 - v_0/\gamma)^2}{4Dt} \right], \quad (2.41)$$

que é uma solução da equação de difusão unidimensional [21, 22],

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}. \quad (2.42)$$

## Equação de Fokker-Planck

Na grande parte dos problemas de interesse físico nos referimos, implícita ou explicitamente, a sequências de eventos aleatórios de natureza Markoviana. Onde, sendo  $x_i$  um evento aleatório ocorrendo no instante de tempo  $t_i$ , uma sequência de eventos aleatórios  $(x_1, t_1), (x_2, t_2), (x_3, t_3), \dots$ , com  $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ , é denominada Markoviana quando a probabilidade de ocorrência de qualquer evento depender apenas da probabilidade de ocorrência do evento imediatamente anterior [21, 22, 30, 35, 40].

Utilizando a notação  $P(x_F, t_F; x_I, t_I)$  para designar a probabilidade condicional de ocorrência do evento  $x_F$  no tempo  $t_F$ , dada a ocorrência do evento  $x_I$  no tempo  $t_I$ , as sequências markovianas obedecem a relação de Chapman-Komogorov,

$$P(x_F, t_F; x_I, t_I) = \sum_k P(x_F, t_F; x_k, t_k) P(x_k, t_k; x_I, t_I), \quad (2.43)$$

onde o índice  $k$  caracteriza os elementos intermediários, entre os instantes iniciais

( $t_I$ ) e finais ( $t_F$ ). A representação contínua para a densidade de probabilidade é dada pela forma integral

$$P(x_F, t_F; x_I, t_I) = \int P(x_F, t_F; x_k, t_k)P(x_k, t_k; x_I, t_I)dx_k . \quad (2.44)$$

Sendo o instante inicial uma variável escolhida arbitrariamente, as probabilidades condicionais devem depender apenas do lapso decorrido entre os instantes final e inicial de qualquer processo de interesse físico. Portanto, também podemos escrever a relação de Chapman-Kolmogorov contínua na forma

$$P(x_F, t_F - t_I; x_I) = \int P(x_F, t_F - t_k; x_k)P(x_k, t_k - t_I; x_I)dx_k . \quad (2.45)$$

Introduzindo uma mudança de variável na equação (2.45) ,  $t_F - t_I = t + \Delta t$  e  $t = t_k - t_I$  temos

$$P(x_F, t + \Delta t; x_I) = \int dx_k P(x_F, \Delta t; x_k)P(x_k, t; x_I) . \quad (2.46)$$

Utilizando a notação introduzida na seção anterior para a distribuição de velocidades, podemos escrever a expressão de Chapman-Kolmogorov numa forma adaptada ao movimento Browniano.

$$P(v, t + \Delta t; v_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(v, \Delta t; v')P(v', t; v_0)dv', \quad (2.47)$$

a probabilidade condicional  $p(v, \Delta t; v')$  é interpretada como a probabilidade de transição entre dois estados com velocidades distintas. Multiplicando por uma

função  $\phi(v)$  bem comportada e integrando em  $dv$  ambos os lados da equação (2.47), temos a seguinte expressão

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(v, t + \Delta t; v_0) \phi(v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(v, \Delta t; v') P(v', t; v_0) \phi(v) dv' dv, \quad (2.48)$$

onde ambos os termos desta igualdade podem ser expandidos em série de Taylor.

Assim teremos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(v, t + \Delta t; v_0) \phi(v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ P(v, t, v_0) \phi(v) + \Delta t \frac{\partial P(v, t, v_0)}{\partial t} \phi(v) + \dots \right] dv, \quad (2.49)$$

onde o valor esperado de  $\phi(v)$  é dado por

$$\langle \phi(v) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(v, t; v_0) \phi(v) dv. \quad (2.50)$$

De forma semelhante, desenvolvemos  $\phi(v)$  no lado direito da equação (2.48), expandido em série de Taylor

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} P(v, \Delta t; v') \phi(v) dv &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(v, \Delta t; v') \left[ \phi(v') + \phi'(v')(v - v') \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \phi''(v')(v - v')^2 + \dots \right] dv \\ &= \phi(v') \int_{-\infty}^{+\infty} P(v, \Delta t; v') dv \\ &\quad + \phi'(v') \int_{-\infty}^{+\infty} P(v, \Delta t; v') (v - v') dv \\ &\quad + \frac{1}{2} \phi''(v') \int_{-\infty}^{+\infty} P(v, \Delta t; v') (v - v')^2 dv + \dots \\ &= \phi(v') + \phi'(v') A(v') \Delta t + \frac{1}{2} \phi''(v') B(v') \Delta t + \dots, \end{aligned} \quad (2.51)$$

onde  $\int_{-\infty}^{+\infty} P(v, \Delta t; v') dv = 1$  e

$$A(v')\Delta t = \int_{-\infty}^{+\infty} P(v, \Delta t; v')(v - v') dv \quad (2.52)$$

e

$$B(v')\Delta t = \int_{-\infty}^{+\infty} P(v, \Delta t; v')(v - v')^2 dv . \quad (2.53)$$

Portanto, o lado direito da equação (2.48) será escrito na forma

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(v', t; v_0) P(v, \Delta t; v') \phi(v) dv' dv &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(v', t, v_0) \left[ \phi(v') \right. \\ &+ \phi'(v') A(v') \Delta t \\ &+ \left. \frac{1}{2} \phi''(v') B(v') \Delta t + \dots \right] dv'. \end{aligned} \quad (2.54)$$

No lado direito da equação anterior temos três integrais, e podemos escrever como

(i) primeiro termo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(v', t; v_0) \phi(v') dv' = \langle \phi(v') \rangle \quad (2.55)$$

(ii) segundo termo. Integrando por partes, onde  $dy = \phi'(v') dv'$ , temos

$$\Delta t \int_{-\infty}^{+\infty} P(v', t; v_0) \phi'(v') A(v') dv' = -\Delta t \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(v') \frac{\partial}{\partial v'} [P(v', t; v_0) A(v')] dv' \quad (2.56)$$



onde  $A(v)\Delta t = 0$ .

(iii) Terceiro termo. Integrando por partes duas vezes, primeiro  $dy = \phi''(v')dv'$  e segundo  $dR = \phi'(v')dv'$ , temos

$$\frac{1}{2}\Delta t \int_{-\infty}^{+\infty} P(v', t; v_0) \phi''(v') B(v') dv' = \frac{1}{2}\Delta t \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(v') \frac{\partial^2}{\partial v'^2} [P(v', t; v_0) B(v')] dv' \quad (2.57)$$

onde  $B(v)\Delta t = 0$ . Igualando todos os termos encontrados nas equações (2.49), (2.54)(i),(ii),(iii) e substituindo na equação (2.48), temos

$$\begin{aligned} \langle \phi(v) \rangle + \Delta t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial P(v, t; v_0)}{\partial t} \phi(v) dv &= \langle \phi(v') \rangle \\ &- \Delta t \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(v') \frac{\partial}{\partial v'} [P(v', t; v_0) A(v')] dv' \\ &+ \frac{1}{2}\Delta t \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(v') \frac{\partial^2}{\partial v'^2} [P(v', t; v_0) B(v')] dv' \end{aligned} \quad (2.58)$$

Finalmente, considerando  $v' = v$ , obtemos a equação de Fokker-Planck

$$\frac{\partial P(v, t; v_0)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial v} [A(v)P(v, t; v_0)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} [B(v)P(v, t; v_0)] . \quad (2.59)$$

Os coeficientes  $A(v)$  e  $B(v)$  são escolhidos por diferentes critérios. Um caso conhecido é o da forma gaussiana, advindo do tratamento de Langevin para o movimento Browniano, temos

$$A(v') = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} (v - v') P(v, t; v') dv = -\gamma v' \quad (2.60)$$

e

$$B(v') = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} (v - v')^2 P(v, t; v') dv = \frac{2\gamma k_B T}{m} = 2\gamma^2 D \quad (2.61)$$

assim, a equação de Fokker-Planck passa a ser

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial v} (vP) + \frac{\gamma k_B T}{m} \frac{\partial^2 P}{\partial v^2}, \quad (2.62)$$

conhecida como equação de Ornstein-Uhlenbeck, que corresponde a um processo de difusão no espaço das velocidades [21].

## Processos Markovianos e não-Markovianos

É importante enfatizar que processos não-Markovianos, que ocorrem por exemplo em casos de ruído colorido, ou seja, correlações não locais no tempo, não podem ser considerados como correções de uma classe de processos Markovianos. Os processos não-Markovianos governam todos os processos aleatórios, com exceção de uma pequena minoria que satisfazem as propriedades de processos Markovianos. Processos de Markov têm sido exaustivamente estudado, mas não é apropriado tratar um processo não-Markoviano como uma mera modificação ou correção de processos de Markov, assim como é inapropriado, por exemplo, tratar todo sistema dinâmico não-linear como uma correção do oscilador harmônico [36].

É bem conhecido que um processo estocástico é uma coleção de variáveis aleatórias  $X_t$ , rotulado pelo índice  $t$  que pode ser discreto ou satisfaz, mais frequentemente todos os números reais, em algum intervalo. Esta propriedade estocástica

de  $\{X_t\}$  é expressa pela função distribuição conjunta

$$P_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \text{probabilidade que} \quad (2.63)$$

$$x_1 < X_{t_1} < x_1 + dx_1, x_2 < X_{t_2} < x_2 + dx_2, \dots, x_n < X_{t_n} < x_n + dx_n .$$

Este é um processo definido unicamente pelo conjunto completo destas funções distribuições para  $n = 1, 2, 3, \dots$ , que em geral, é infinito. Quando as variáveis  $X_{t_1} = x_1$ ,  $X_{t_2} = x_2, \dots, X_{t_k} = x_k$  são conhecidas, as demais variáveis obedecem a função distribuição de probabilidade condicional

$$P(x_{k+1}, t_{k+1}; \dots; x_n, t_n | x_1, t_1; \dots; x_k, t_k) = \frac{P_n(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k; x_{k+1}, t_{k+1}; \dots; x_n, t_n)}{P(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k)} . \quad (2.64)$$

Esta é uma distribuição de probabilidade de  $X_{t_{k+1}}, \dots, X_{t_n}$ , onde  $x_1, \dots, x_k$  entra como parâmetro. Considerando  $t_i$  em ordem cronológica, então o processo é Markoviano se a probabilidade condicional Eq. (2.64), depender apenas do último valor  $x_k$  em  $t_k$  e é independente dos valores anteriores  $x_{i < k}$ . Isto deve garantir para todo  $n$ , para qualquer  $k$ , e para qualquer  $t_1, \dots, t_k$  e  $x_1, \dots, x_k$ . Sendo isto verdade, uma vez dado  $P_1$  e  $P_2$  todo  $P_n$  pode ser construído. Por exemplo,

$$\begin{aligned} P_3(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3) &= P_{2|1}(x_1, t_1; x_2, t_2 | x_3, t_3) P_2(x_1, t_1; x_2, t_2) \\ &= P_1(x_1, t_1) P_{1|1}(x_1, t_1 | x_2, t_2) P_{1|1}(x_2, t_2 | x_3, t_3) , \end{aligned} \quad (2.65)$$

onde  $P_{1|1}(x_2, t_2 | x_3, t_3)$  é o termo conhecido como probabilidade de transição.

A razão pela popularidade de um processo de Markov é o fato que ele é completamente caracterizado apenas, por estas duas funções distintas Eq. (2.64)

e (2.65). Para processos não-markovianos a função distribuição Eq. (2.63) têm que ser determinada por algum outro meio, normalmente uma construção matemática diferente.

## A Equação Mestra

A equação que governa a dinâmica estocástica de um processo Markoviano e não-Markoviano é a “Equação Mestra”. É uma das equações mais importantes em física estatística devido a sua aplicabilidade quase universal. Têm sido aplicada a problemas em química, biologia, dinâmica populacional, movimento Browniano, fluidos e semicondutores [22, 30], entre outros.

Integrando o lado esquerdo sobre  $x_2$  na Eq. (2.65) e assumindo  $t_1 < t_2 < t_3$  temos,

$$\int P_3(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3) dx_2 = P_2(x_1, t_1; x_3, t_3) , \quad (2.66)$$

onde teremos

$$P_2(x_1, t_1; x_3, t_3) = P_1(x_1, t_1) \int P_{1|1}(x_1, t_1|x_2, t_2) P_{1|1}(x_2, t_2|x_3, t_3) dx_2 . \quad (2.67)$$

Dividindo ambos os membros desta equação por  $P_1(x_1, t_1)$ , temos

$$\frac{P_2(x_1, t_1; x_3, t_3)}{P_1(x_1, t_1)} = \int P_{1|1}(x_1, t_1|x_2, t_2) P_{1|1}(x_2, t_2|x_3, t_3) dx_2 , \quad (2.68)$$

no lado esquerdo da equação acima temos a densidade de probabilidade condicional

$$\frac{P_2(x_1, t_1; x_3, t_3)}{P_1(x_1, t_1)} = P_{1|1}(x_1, t_1|x_3, t_3), \quad (2.69)$$

assim,

$$P_{1|1}(x_1, t_1|x_3, t_3) = \int P_{1|1}(x_1, t_1|x_2, t_2)P_{1|1}(x_2, t_2|x_3, t_3)dx_2, \quad (2.70)$$

onde temos a equação de Chapman-Kolmogorov. É importante notar, que a probabilidade de transição de  $(x_1, t_1)$  para  $(x_3, t_3)$  foi quebrada em um processo envolvendo dois sucessivos passos, de  $(x_1, t_1)$  para  $(x_2, t_2)$ , e então, de  $(x_2, t_2)$  para  $(x_3, t_3)$ . O fato de que a probabilidade de dois passos sucessivos serem o produto das probabilidades de passos individuais é uma importante característica de um processo de Markov [30]. A probabilidade de transição de  $(x_2, t_2) \rightarrow (x_3, t_3)$  não é afetada pelo fato de que esta transição foi precedida pela transição  $(x_1, t_1) \rightarrow (x_2, t_2)$ .

Um dos casos de um processo de Markov é o da cadeia de Markov. Cadeias de Markov envolvem transições em tempo discreto entre valores de uma variável estocástica discreta. Temos  $X$  realizações  $X(m)$ , onde  $m = 0, 1, 2, \dots, M$ . Reescrevendo a Eq. (2.69) na forma discreta, temos

$$P_1(n, t) = \sum_{m=1}^M P_1(m, t)P_{1|1}(m, t|n, t), \quad (2.71)$$

substituindo  $t \rightarrow t + \Delta t$ , temos

$$P_1(n, t + \Delta t) = \sum_{m=1}^M P_1(m, t)P_{1|1}(m, t|n, t + \Delta t), \quad (2.72)$$

subtraindo e dividindo ambos os membros por  $\Delta t$ , temos o limite dado por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_1(n, t)}{\partial t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_1(n, t + \Delta t) - P_1(n, t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sum_{m=1}^M P_1(m, t) \left[ P_{1|1}(m, t|n, t + \Delta t) - P_{1|1}(m, t|n, t) \right]}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \sum_{m=1}^M P_1(m, t) \left[ P_{1|1}(m, t|n, t + \Delta t) - \delta_{m,n} \right], \quad (2.73)
\end{aligned}$$

podemos expandir a probabilidade de transição  $P_{1|1}(m, t|n, t + \Delta t)$  em uma série de potência de  $\Delta t$  e manter apenas os termos de baixa ordem.

$$\begin{aligned}
P_{1|1}(m, t|n, t + \Delta t) &= \delta_{m,n} + \left[ -\Delta t \sum_{l=1}^M W_{m,l}(t) \right] \delta_{m,n} + W_{m,n}(t) \Delta t + \dots, \\
&= \delta_{m,n} \left[ 1 - \Delta t \sum_{l=1}^M W_{m,l}(t) \right] + W_{m,n}(t) \Delta t + \dots \quad (2.74)
\end{aligned}$$

onde  $W_{m,n}(t)$  é a taxa de probabilidade de transição e  $W_{m,n}(t)\Delta t$  é a probabilidade de uma transição do estado  $m$  para o estado  $n$  durante o intervalo de tempo entre  $t$  e  $t + \Delta t$ . Similarmente,  $[1 - \sum_{l=1}^M W_{m,l}(t)\Delta t]$  é a probabilidade de não haver transição durante o intervalo de tempo entre  $t$  e  $t + \Delta t$ . Substituindo a Eq. (2.74) na Eq. (2.73), obtemos

$$\frac{\partial P_1(n, t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \sum_{m=1}^M P_1(m, t) \left[ \delta_{m,n} \left[ 1 - \Delta t \sum_{l=1}^M W_{m,l}(t) \right] + W_{m,n}(t) \Delta t - \delta_{m,n} \right],$$

e finalmente

$$\frac{\partial P_1(n, t)}{\partial t} = \sum_m \left[ W_{m,n} P_1(m, t) - W_{n,m} P_1(n, t) \right], \quad (2.75)$$

temos a Equação Mestra. Esta equação nos fornece a taxa de mudança da proba-

bilidade  $P_1(n, t)$  devido as transições para o estado  $n$  de todos os outros estados e devido a transições a partir do estado  $n$  para todos os outros estados [30].

A Equação Mestra é uma equação que descreve a probabilidade de transição de um processo Markoviano, válida para qualquer valor inicial de  $x_1$  e  $t_1$ . Se conhecermos  $P_1(x_1, t_1)$  e toda hierarquia Eq. (2.63) o processo será unicamente determinado (para  $\geq t_1$ ).

Na literatura podemos encontrar a Equação Mestra com memória, ou Equação Mestra Generalizada (EMG), com o objetivo de definir um processo não-Markoviano.

$$\dot{P}_{1|1}(x, t|x_1, t_1) = \int_{t_1}^t dt' \sum_{x'} \{W_{x,x'}(t-t')P_{1|1}(x', t'|x_1, t_1) - W_{x',x}(t-t')P_{1|1}(x, t'|x_1, t_1)\}. \quad (2.76)$$

onde a probabilidade de transição depende dos tempos anteriores a  $t$ . A Equação Mestra Generalizada descreve a evolução da probabilidade  $P_i(t)$  de encontrar uma partícula no estado  $i$  no tempo  $t$ . O que distingue a EMG da Equação Mestra é a dependência em tempos  $t' < t$  anteriores ao tempo presente. Por isso, a EMG pode descrever processos não-Markovianos, ou seja, processos não-locais em tempo e espaço. Ao contrário dos processos de Markov, processos não-Markovianos não podem ser definidos pelo simples conhecimento de  $P(x_1, t_1|x, t)$ . A equação não é válida para todo  $x_1, t_1$  [36].

## 2.4 Difusão Anômala

### Processos de Lévy

Paul Pierre Lévy foi um matemático francês que trabalhou principalmente na área de teorias de probabilidades e introduziu uma classe de estratégias de apostas baseada em processos estocásticos de tempo local (*Martingales*): voos de Lévy, a distribuição de Lévy, a distribuição assimétrica alfa-estável de Lévy, entre outros. Lévy resolveu o problema para variáveis I.I.D, onde a distribuição resultante da soma converge para a mesma distribuição das variáveis. Criando assim a lei estável de Lévy. As leis de Lévy lidam com FDP que possuem momentos ( $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx \rightarrow \infty$ ) infinitos e assim não apresentam escala bem definida [14, 31, 32].

A distribuição assimétrica alfa-estável de Lévy representa uma família de distribuições de probabilidade caracterizada por 4 parâmetros, índice de Lévy  $\alpha \in (0, 2]$ , assimetria  $\beta \in [-1, 1]$ , shift ( $\mu$ ) e um fator de escala ( $c$ ). Quando  $\beta = 0$  a distribuição é simétrica em torno de  $\mu$  e passa a ser referida como simétrica alfa-estável. A distribuição é definida pela transformada inversa de Fourier de sua função característica  $\psi(t)$

$$f(x; \alpha, \beta, \mu, c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \psi(t) dt, \quad (2.77)$$

onde,

$$\psi(t) = \exp[it\mu - |ct|^\alpha (1 - i\beta \text{sign}(t)\Phi)], \quad (2.78)$$

e  $\Phi$  é dada por,

$$\Phi \sim \begin{cases} \tan(\frac{\pi\alpha}{2}) & \forall \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \log(|t|) & \alpha = 1. \end{cases} \quad (2.79)$$

O fator  $c$  fornece a medida da largura da distribuição. O expoente  $\alpha < 2$  caracteriza o comportamento assintótico de “cauda grossa” fazendo com que eventos raros



tornem-se mais frequentes. Neste caso, a variância da distribuição será infinita. A função  $\text{sign}(t)$  assume valores  $-1$  para  $t < 0$ ,  $0$  para  $t = 0$  e  $+1$  para  $t > 0$ . Soluções analíticas para as distribuições de Lévy são obtidas somente para alguns casos específicos.

(i) Distribuição assimétrica Lévy-Smirnov ( $\alpha = 1/2, \beta = 1$ )

$$f(x) = \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{c}{2(x-\mu)}}}{(x-\mu)^{3/2}} \quad (2.80)$$

(ii) Distribuição Gaussiana ( $\alpha = 2, \beta = 0$ )

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{c\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{4c}} \quad (2.81)$$

(iii) Distribuição Cauchy-Lorentz ( $\alpha = 1, \beta = 0$ )

$$f(x) = \frac{c}{\pi} \frac{1}{(x-\mu)^2 + c^2} \quad (2.82)$$

O  $n$ -ésimo momento de uma distribuição de Lévy é formalmente definido por:

$$m_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{2\pi} \int_0^\infty x^n \frac{e^{-\frac{c}{2(x-\mu)}}}{(x-\mu)^{3/2}} dx \quad (2.83)$$

A função geradora do momento é definida como,

$$M(t; c, \mu) = \langle e^{tx} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{2\pi} \int_0^\infty e^{tx} \frac{e^{-\frac{c}{2(x-\mu)}}}{(x-\mu)^{3/2}} dx \quad (2.84)$$

No limite assintótico, ou seja na cauda da distribuição de Lévy-Smirnov, a

densidade de probabilidade exibe o comportamento lei de potência

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x; c) = \frac{c}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x^{3/2}} \quad (2.85)$$

Esta propriedade decorre do fato que para grandes valores do módulos das realizações da variável aleatória  $X$ , as distribuições de Lévy exibem a característica de uma lei de potência geral

$$f(|x|) \sim \frac{1}{|x|^{1+\alpha}}. \quad (2.86)$$

onde o expoente  $\alpha$  está entre 0 e 2.

## Teorema do limite central generalizado

Basicamente o teorema do limite central afirma que a distribuição referente à soma de  $N$  variáveis aleatória *I.I.D.*, com média e variância finita, convergem para uma distribuição Gaussiana quando  $N \rightarrow \infty$ . Esta, é a condição de estabilidade da distribuição Gaussiana. Lévy generalizou este teorema ao considerar que a soma de  $N$  variáveis aleatórias *I.I.D.*, com média finita e variância lei de potência, tendem à distribuição lei de potência (tipo cauda grossa) de Lévy quando  $N \rightarrow \infty$ . Este é considerado o teorema do limite central generalizado e garante a condição de estabilidade para a distribuição de variáveis de Lévy.

Temos  $y_1, y_2, y_3, \dots$ , uma sequência de variáveis aleatórias *I.I.D.*, compartilhando a mesma distribuição. Para qualquer variável aleatória  $Z_{a_n}$ , definida por

$$Z_{a_n} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{a_n} \quad (2.87)$$

onde, para o caso em que  $\langle Z_{a_n} \rangle = 0$  e  $\langle Z_{a_n}^2 \rangle \sim t^{-\gamma}$ , onde  $\gamma \in [1, 3]$ . A função característica de  $Z_{a_n}$  será

$$\varphi_{Z_{a_n}}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{y_i}\left(\frac{t}{a_n}\right) = \left[\varphi_y\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \quad (2.88)$$

logo teremos:

$$\begin{aligned} \left[\varphi_y\left(\frac{t}{a_n}\right)\right]^n &= \left[1 + it\langle Z_{a_n} \rangle - \frac{t^2\langle Z_{a_n}^2 \rangle}{2a_n} + \mathcal{O}\left(\frac{t^2}{a_n}\right)\right]^n \\ &= \left[1 - \frac{t^{(2-\gamma)}}{a_n} + \mathcal{O}\left(\frac{t^{(2-\gamma)}}{2a_n}\right)\right]^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[-\frac{t^{(2-\gamma)}}{2a_n} + \mathcal{O}\left(\frac{t^{(2-\gamma)}}{a_n}\right)\right]^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \left[-\frac{t^{(2-\gamma)}}{2a_n} + \mathcal{O}\left(\frac{t^{(2-\gamma)}}{a_n}\right)\right]^k \end{aligned} \quad (2.89)$$

Portanto, no limite assintótico a convergência para uma distribuição de Lévy é verificada para todo  $t > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Z_{a_n}}(t) = e^{-\frac{1}{2}|t|^{(2-\gamma)}} \quad (2.90)$$

## Caminhadas Lévy correlacionadas

Caminhadas aleatórias apresentam difusão normal quando estão livres de correlações, tanto na distribuição dos passos, quanto na distribuição para os ângulos de re-orientação  $\rho$  [44, 45]. Nos processos que apresentam difusão normal o expoente de Hurst ( $H$ ) visto na Eq. (1.1) é igual a 1/2. A Figura 2.3 é um típico exemplo

de caminhada aleatória bidimensional como processo de difusão normal. Também conhecido como movimento Browniano [13].

Um modelo recente de caminhadas aleatórias, conhecido como Lévy correlacionado usa uma distribuição lei de potência para o tamanho da caminhada Eq. (2.91) e uma distribuição circular de ângulos de re-orientação não-uniforme Eq. (2.92), conhecida como distribuição envolvida de Cauchy [44].

$$P(l) \sim l^{-\mu} . \quad (2.91)$$

A distribuição  $P(l)$  é a probabilidade de dar passos de tamanho  $l$ ,  $\mu = \alpha + 1$ , onde  $\alpha$  é o índice de Lévy. O valor  $\mu$  encontra-se no intervalo  $1 < \mu \leq 3$ , permitindo uma rica variedade de variações de caminhos que vão desde movimento Browniano [45] ( $\mu = 3$ ) (Figura 2.3), até movimento balístico, ( $\mu \rightarrow 1$ ) (Figura 2.4 e 2.5) [46]. Entretanto, mesmo para  $\mu > 3$  é possível ter movimento Browniano. Fenômenos com propriedades de invariância de escala, ou seja  $P(\lambda l) = \lambda^{-\mu} P(l)$ , permitem uma alta eficiência nos cenários de busca aleatória [11, 12, 13, 25, 26, 27, 46, 47].

Memória direcional representa a influência da história passada das mudanças de direções realizadas durante a caminhada no processo de decisão presente. Caminhadas correlacionadas realizam os eventos de re-orientação com base em funções densidade de probabilidade (FDP) angular não-uniforme, construída a partir de uma FDP *wrapped* (embrulhada),

$$f_{wcd}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta)}, \quad \rho \in [0, 1] \quad (2.92)$$

Esta distribuição controla a memória direcional através de mudanças nos valores do

parâmetro  $\rho$ . Para  $\rho = 0$  a distribuição angular é constante (uniforme), desta maneira, o processo torna-se livre de correlações direcionais. Para  $\rho \rightarrow 1$  as correlações são máximas, e a caminhada pode apresentar comportamento balístico [44, 48].

Através da Eq. (2.93) podemos gerar numericamente uma série de caminhos aleatórios, onde a variação dos parâmetros  $\mu$  e  $\rho$  podem gerar caminhadas Figuras. (2.3), (2.4) e (2.5), que apresentam difusão normal  $H = 1/2$ , Figura (2.6) e anômala  $H \neq 1/2$ , Figura (2.7).

$$l = l_0 u^{1/(1-\mu)} \quad (2.93)$$

Figura 2.3: Tradicional caminhada aleatória bidimensional com 5 mil passos. O expoente de escala  $\mu = 3.0$  indica que o movimento é Browniano e não apresenta correlações entre os tamanhos dos passos. O parâmetro de re-orientação  $\rho = 0$  indica ausência de correlações entre os sucessivos ângulos [13, 48].

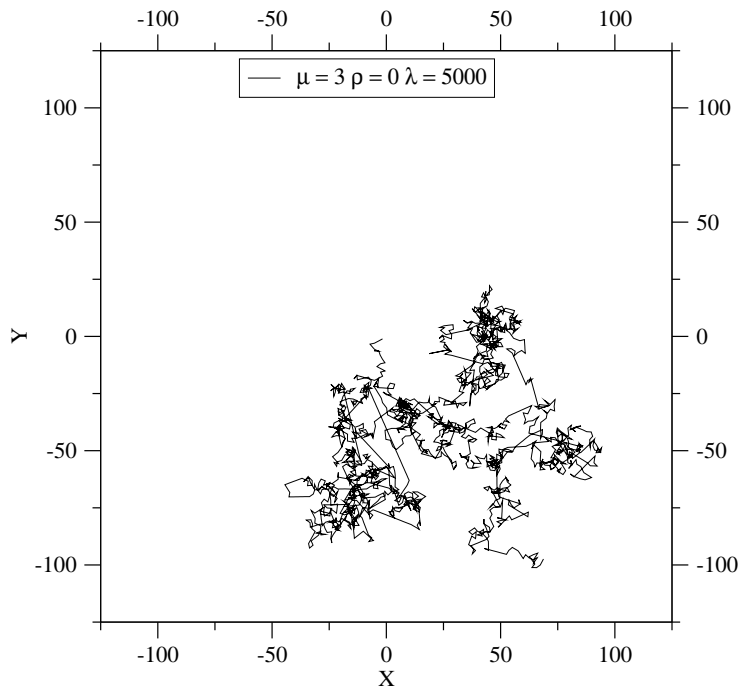


Figura 2.4: Caminhada de Lévy pura ( $\mu = 2.0$ ). Animais como albatrozes realizam este tipo de caminhada durante sua busca por alimentos [11, 48].

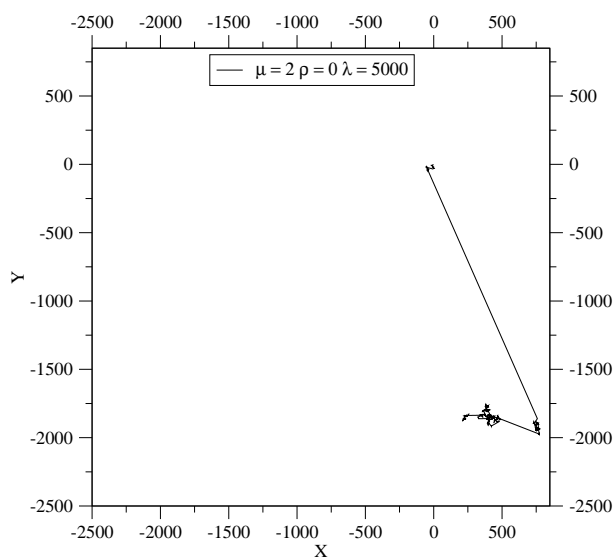


Figura 2.5: Comportamento balístico. Em ambientes com escarcas de alimentos, este se apresenta como o melhor padrão de escaneamento local [46, 48].

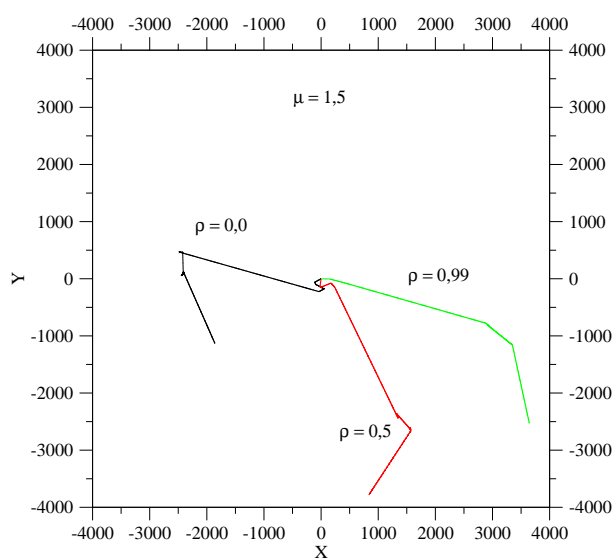


Figura 2.6: Raiz do deslocamento quadrático médio para vários valores da correlação angular ( $\rho$ ) e um expoente de escala fixo ( $\mu = 3,5$ ). Onde, quanto maior a correlação angular maior o expoente de difusão ( $H$ ) [48].

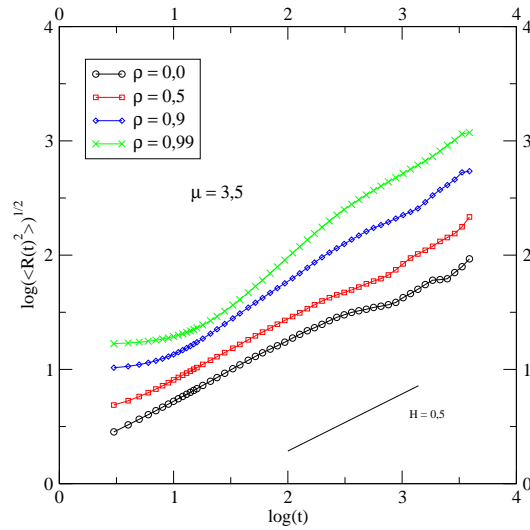
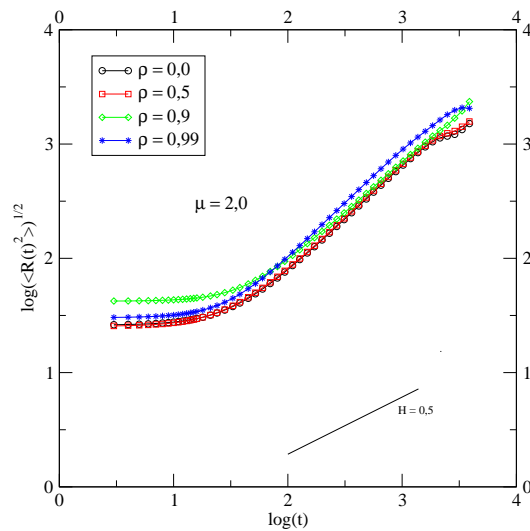


Figura 2.7: Para  $\mu = 2,0$  ocorre difusão anômala superdifusiva, e a medida que o parâmetro de correlação angular  $\rho$  tende a 1, a difusão anômala tende ao comportamento balístico [48].



As Figuras (2.6) e (2.7) mostram o desvio quadrático médio para caminhadas aleatórias geradas ao variarmos o parâmetro de controle dos ângulos de re-orientação,

também conhecido como memória direcional. O expoente de Hurst ( $H$ ) corresponde as inclinações das curvas.

A distribuição de Lévy é uma das distribuições estáveis, por essa razão, ela representa uma opção atrativa para modelagem computacional de fenômenos oriundos da superposição de um grande número de eventos aleatórios. A soma das variáveis aleatórias conservará a forma da distribuição original Eq. (2.91), esta é conhecida como sendo a propriedade de estabilidade [31].

## Equação de Montroll-Weiss

Um problema interessante no estudo de caminhadas aleatórias consiste no estudo de caminhadas aleatórias de tempo contínuo (CATC), introduzido por Montroll-Weiss. O problema de Montroll-Weiss (MW) é formulado como o problema de achar a distribuição de probabilidade  $p(r, t)$  para uma partícula realizando saltos aleatórios [37, 38, 40]. Nas CATC o número  $n$  de saltos realizados pela partícula no intervalo de tempo  $(0, t)$  é uma variável aleatória. Começando a partir da origem em  $t = 0$  uma posição fixa é mantida até o tempo  $t_1$ , e então realiza-se um salto para  $\Delta r_1$ , a partícula espera nesta posição até  $t_2 > t_1$  quando saltará para uma nova posição  $\Delta r_1 + \Delta r_2$ , o processo é então repetido. No eixo dos tempos  $\{t_1, t_2, \dots\}$  definem os tempos para os eventos de saltos. Os tempos  $\tau_1 = t_1 - 0$ ,  $\tau_2 = t_2 - t_1$  etc, são chamados tempos de espera (ou aguardo). Em CATC os tempos de espera  $\{\tau_1, \tau_2, \dots\}$  e os deslocamentos  $\{\Delta r_1, \Delta r_2, \dots\}$  são variáveis aleatórias mutuamente independentes e identicamente distribuídas. Os tempos de espera possuem uma função densidade de probabilidade (FDP) caracterizada por  $\psi(\tau)$ , e os



deslocamentos  $f(\Delta r)$ .

O deslocamento total da partícula no tempo  $t$  é

$$r = \sum_{i=1}^n \Delta r_i . \quad (2.94)$$

Temos  $P(t; n)$  é a probabilidade para  $n$  eventos de saltos no tempo  $t$ . Para achar a densidade de probabilidade  $P(\mathbf{r}, t)$  da partícula estar em  $\mathbf{r}$  no tempo  $t$ , temos

$$P(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(t; n) P_n(\mathbf{r}) , \quad (2.95)$$

onde  $P_n(\mathbf{r})$  é a densidade de probabilidade da partícula estar em  $\mathbf{r}$  após  $n$  saltos. Desde que os tamanhos dos saltos sejam estatisticamente independentes dos tempos de espera, as caminhadas aleatórias de tempo contínuo são consideradas caminhadas desacopladas.

Calculando as transformadas simultâneas de Fourier-Laplace de  $P(r, t)$  podemos obter uma nova equação para densidade de probabilidade em termos de  $t \rightarrow s$  e  $\Delta r \rightarrow k$ . Ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} e^{ik\Delta r} e^{-st} P(r, t) dt d\Delta r &= P_{FL}(k, s) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{ik\Delta r} e^{-st} P(t; n) P_n(r) dt d\Delta r \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-st} P(t; n) dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\Delta r} P_n(r) d\Delta r \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_L(s; n) f_F(k) \end{aligned} \quad (2.96)$$

onde  $P_L(s; n)$  é a transformada de Laplace de  $P(t; n)$  e  $f_F(k)$  a transformada de Fourier de  $f(\Delta r)$ . Considerando a renovação de  $n$  eventos em  $(0, t)$ , podemos definir  $P(t, n)$  como apresentado na equação abaixo e assim obter  $P_L(s; n)$ .

$$\begin{aligned} P(t; n) &= \langle \theta(t_n < t < t_{n+1}) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t_n < t < t_{n+1}) \psi(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.97)$$

onde

$$\theta(t_n < t < t_{n+1}) = \begin{cases} 1 & \text{se } t_n < t < t_{n+1} \\ 0 & \text{caso contrario .} \end{cases} \quad (2.98)$$

A Eq. (2.97) significa que as trajetórias que satisfazem a condição  $t_n < t < t_{n+1}$  possuem  $n$  eventos de saltos. O média é tomada sobre todas as possíveis realizações do processo aleatório na sequencia de tempos de espera  $\{\tau\}$ . Realizando a transformada de Laplace  $t \rightarrow s$  de  $P(t; n)$  temos

$$\begin{aligned} P_L(s; n) &= \int_0^{\infty} e^{-st} P(t, n) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} dt \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t_n < t < t_{n+1}) \psi(\tau) d\tau \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_0^{\infty} e^{-st} \theta(t_n < t < t_{n+1}) dt \right] \psi(\tau) d\tau \\ &= \langle \int_0^{\infty} e^{-st} \theta(t_n < t < t_{n+1}) dt \rangle \\ &= -\frac{1}{s} \langle (e^{-st_{n+1}} - e^{-st_n}) \rangle \\ &= \frac{1}{s} \langle e^{-st_n} (1 - e^{-s(t_{n+1}-t_n)}) \rangle \\ &= \frac{1}{s} \langle e^{-st_n} \rangle (1 - \langle e^{-s\tau} \rangle), \end{aligned} \quad (2.99)$$

onde,

$$\langle e^{-st_n} \rangle = \psi_L^n(s) , \quad (2.100)$$

e

$$\langle e^{-s\tau} \rangle = \psi_L(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} \psi(\tau) d\tau . \quad (2.101)$$

Assim, temos que a transformada de Laplace de  $P(t; n)$  é dada por,

$$\begin{aligned} P_L(s; n) &= \frac{1}{s} \psi_L^n(s) [1 - \psi_L(s)] \\ &= \frac{1 - \psi_L(s)}{s} \psi_L^n(s) . \end{aligned} \quad (2.102)$$

Substituindo este resultado na Eq. (2.96), temos  $P_{FL}(k, s)$

$$\begin{aligned} P_{FL}(k, s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - \psi_L(s)}{s} \psi_L^n(s) f_F(k) \\ &= \frac{1 - \psi_L(s)}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_L^n(s) f_F(k) . \end{aligned} \quad (2.103)$$

Com um pouco mais de álgebra podemos trabalhar a soma que aparece na equação acima. Seja  $Q_{FL}(k, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_L^n(s) f_F(k)$ , a transformada Fourier-Laplace da probabilidade  $Q(\Delta r, t)$  da partícula chegar na posição  $\Delta r$  num tempo  $t$  [37, 39]. Podemos definir  $Q(\Delta r, t)$  como sendo

$$Q(\Delta r, t) = \int_{-\infty}^r d\Delta r \int_0^t d\Delta t Q(r - \Delta r, t - \Delta t) q(\Delta r) q(\Delta t) + \delta(r) \delta(t) , \quad (2.104)$$

onde  $q(\Delta r) = f(\Delta r)$  e  $q(\Delta t) = \phi(\Delta t)$ . Usando o teorema da convolução podemos

agora resolver  $Q_{FL}(k, s)$  em termos das transformadas de  $f$  e  $\psi$

$$\begin{aligned}
 Q_{FL}(k, s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_L^n(s) f_F(k) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{ik\Delta r} e^{-st} Q(\Delta r, t) dt d\Delta r \\
 &= Q_{FL}(k, s) f_F(k) \psi_L(s) + 1 .
 \end{aligned}
 \tag{2.105}$$

Resolvendo em  $Q_{FL}(k, s)$  encontramos,

$$Q_{FL}(k, s) = \frac{1}{1 - f_F(k) \psi_L(s)} .
 \tag{2.106}$$

Substituindo este resultado novamente na Eq. (2.103), temos,

$$P_{FL}(k, s) = \frac{1 - \psi_L(s)}{s} \frac{1}{1 - f_F(k) \psi_L(s)} .
 \tag{2.107}$$

onde finalmente, encontramos a expressão final para a densidade de probabilidade  $P_{FL}(k, s)$ , conhecida como Equação Montroll-Weiss. A função  $Q(\Delta r, t)$  é a equação de evolução da distribuição de renovação de posições.

## Momentos

Se o deslocamento médio em um simples salto for diferente de zero, ou seja

$$\langle \Delta r \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta r f(\Delta r) d\Delta r \neq 0
 \tag{2.108}$$

podemos esperar um drift  $\langle r \rangle \neq 0$ . Este deslocamento pode ser encontrado com base na equação de Montroll-Weiss usando a expansão para pequenos  $k$

$$P_{FL}(k, s) \sim 1 + ik\langle r(s) \rangle + \dots \quad (2.109)$$

da função geradora de momentos, temos

$$-\frac{\partial}{\partial k} P_{FL}(k, s) \Big|_{k=0} = \langle r(s) \rangle. \quad (2.110)$$

Usando a Eq. (2.107), e usando a identidade  $(-i\partial f_F(k)/\partial k) \Big|_{k=0} = \langle \Delta r \rangle$  temos

$$\langle r(s) \rangle = \frac{\psi_L(s)}{s[1 - \psi_L(s)]} \langle \Delta r \rangle. \quad (2.111)$$

O número médio de saltos pode ser calculado com a Eq. (2.102)

$$\begin{aligned} \langle n(s) \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} n P_L(s; n) \\ &= \frac{1 - \psi_L(s)}{s} \sum_{n=0}^{\infty} n \psi_L^n(s) \\ &= \frac{\psi_L(s)}{s[1 - \psi_L(s)]}. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle r(s) \rangle &= \frac{\psi_L(s)}{s[1 - \psi_L(s)]} \langle \Delta r \rangle \\ &= \langle n_L(s) \rangle \langle \Delta r \rangle \end{aligned} \quad (2.113)$$

ou seja, o deslocamento médio do caminhante aleatório é o número médio de passos

vezes o deslocamento médio de um simples passo. No domínio do tempo temos,  $\langle r(t) \rangle = \langle n(t) \rangle \langle \Delta r \rangle$ .

A análise do deslocamento quadrático médio é feita usando

$$\begin{aligned} \langle r^2(s) \rangle &= -\frac{\partial^2}{\partial k^2} P_{FL}(k, s) \Big|_{k=0} \\ &= \langle n_L(s) \rangle \langle (\Delta r)^2 \rangle + \langle n(n_L - 1)(s) \rangle \langle \Delta r \rangle^2 \\ &= \frac{\psi_L(s)}{s[1 - \psi_L(s)]} \langle (\Delta r)^2 \rangle + 2 \frac{\psi_L^2(s)}{s[1 - \psi_L(s)]^2} \langle \Delta r \rangle^2. \end{aligned} \quad (2.114)$$

A Eq. (2.114) nos diz que existem dois tipos de contribuições para o deslocamento quadrático médio, o primeiro termo representa flutuações no tamanho dos deslocamentos microscópicos individuais, e segundo termo flutuações no número de deslocamentos.

A partir da Eq. (2.101) podemos assumir que

$$\psi_L(s) \sim \begin{cases} 1 - s \langle \tau \rangle & \text{caso 1} \\ 1 - s^\alpha A & \text{caso 2,} \end{cases} \quad (2.115)$$

quando  $s \rightarrow 0$ . Usualmente,  $\langle \tau \rangle$  é o tempo médio de aguardo para o caso 2, sendo sua FDP dada por

$$\psi(\tau) \propto \tau^{-1-\alpha} \quad (2.116)$$

onde  $0 < \alpha < 1$ . Portanto, o tempo médio de espera diverge.

O comportamento do deslocamento médio para pequenos  $s$  é

$$\langle r(s) \rangle \sim \begin{cases} \frac{\langle \Delta r \rangle}{s^2 \langle \tau \rangle} & \text{caso 1} \\ \frac{\langle \Delta r \rangle}{As^{1+\alpha}} & \text{caso 2.} \end{cases} \quad (2.117)$$

Substituindo  $\psi$  na Eq. (2.114), calculamos o deslocamento quadrático médio

$$\langle r^2(s) \rangle \sim \begin{cases} \frac{\langle (\Delta r)^2 \rangle}{s^2 \langle \tau \rangle} + \frac{2 \langle \Delta r \rangle^2}{s^3 \langle \tau \rangle^2} & \text{caso 1} \\ \frac{\langle (\Delta r)^2 \rangle}{A s^{1+\alpha}} + \frac{2 \langle \Delta r \rangle^2}{A^2 s^{2\alpha+1}} & \text{caso 2 .} \end{cases} \quad (2.118)$$

Resolvendo as transformadas inversa de Laplace, teremos  $\langle r^2(t) \rangle$

$$\langle r^2(t) \rangle \sim \begin{cases} \frac{\langle (\Delta r)^2 \rangle}{\langle \tau \rangle} t + \frac{\langle \Delta r \rangle^2}{\langle \tau \rangle^2} t^2 & \text{caso 1} \\ \frac{\langle (\Delta r)^2 \rangle}{A} \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{2 \langle \Delta r \rangle^2}{A^2} \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} & \text{caso 2 .} \end{cases} \quad (2.119)$$

Vemos que quando a FDP dos tempos de espera é da forma cauda longa (em inglês *long tailed*), a difusão é anômala e mais lenta do que o caso de difusão normal. Este processo de difusão é chamado de subdifusão.

## Equações fracionárias de difusão

Processos difusivos resultam de movimentos irregulares em escala microscópica, porém do ponto de vista macroscópico apresentam grande regularidade, obedecendo leis dinâmicas conhecidas. São processos comuns na natureza, ocorrendo em fenômenos como transporte de fluidos em meios porosos, movimento estelar, ativos financeiros, entre outros. Em cada caso é possível obter um segundo momento finito ou divergente, representando difusão anômala ou não. Difusão anômala com segundo momento finito pode ser caracterizado através da Eq. (1.1) e de uma

equação fracionária de difusão [20, 40, 49, 50] do tipo

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x, t) = {}_0D_t^{1-\gamma} \left[ K_\gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t) \right] \quad (2.120)$$

onde  $K_\gamma$  é o coeficiente de difusão e  ${}_0D_t^{1-\gamma}$  a derivada de Riemann-Liouville. Ao contrário dos processos de caminhadas aleatórias correlacionadas, um processo anômalo do tipo Lévy não possui segundo momento finito, sendo assim caracterizado pela distribuição de Lévy. Assim, neste contexto, a equação de difusão para um processo de Lévy é,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x, t) = K_\mu \frac{\partial^\mu}{\partial |x|^\mu} \rho(x, t) \quad (2.121)$$

cuja solução é a distribuição de Lévy, baseada na generalização do teorema de limite central, ou seja, o teorema Levy-Gnedenko

$$L_\mu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx - K_\mu |k|^\mu t} dk \quad (2.122)$$

Difusão anômala pode ser verificada através de diferentes tipos de equações diferenciais. Estas equações nos permite descrever uma grande variedade de situações físicas. Entre elas a equação de Fokker-Planck (EFP), que possuem uma forma fracionária dada por,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x, t) = -{}_0D_t^{1-\gamma} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (F(x, t)\rho(x, t)) \right] + {}_0D_t^{1-\gamma} \left[ K_{\gamma, \mu} \frac{\partial^\mu}{\partial |x|^\mu} \rho(x, t) \right] \quad (2.123)$$

onde para  $\mu = 2$  e  $\gamma = 1$ , a forma usual da EFP, Eq. (2.59) é recuperada. A solução é realizada através de derivadas fracionárias no tempo, ou seja,  $\mu = 2$  e  $0 < \gamma \leq 1$  ou no espaço  $\gamma = 1$  e  $0 < \mu \leq 2$ .



## Capítulo 3

# Caminhadas do Elefante, Amnésia e Alzheimer

### 3.1 Introdução

Neste capítulo apresento resultados de caminhadas aleatórias Markovianas e não-Markovianas, baseadas em processos estocásticos com dependência na história completa e parcial, ao incluir uma escala de memória limitada e uma ilimitada em caminhadas aleatórias. Correlações de curto alcance de tempo para processos Markovianos e de longo alcance para os não-Markovianos [51, 52, 53, 54, 55, 56].

Processos estocásticos não-Markovianos aparecem em diversos sistemas, físicos [57, 58], biológicos [11, 12, 13, 46], econômicos [16, 59, 60] e até na música [61]. No entanto, os métodos tradicionais de lidar com a equação de evolução (equação Fokker-Planck) para a função densidade de probabilidade (FDP) de um lado e o ruído não-Markoviano por outro lado, tendem a obscurecer a relação exata entre

eles. Soluções exatas de processos não-Markovianos aparecem com pouca frequência e geram considerável interesse [51], ainda mais quando envolvem sistemas Markovianos que levam a uma ou mais transição de fase (regimes) [53, 55].

## 3.2 Caminhada do elefante

Esta caminhada começa na origem no tempo  $t_0 = 0$  e retém sua história completa. Devido ao ditado que elefantes lembram de tudo, esta caminhada é conhecida como caminhada do elefante. Este termo foi cunhado por Schütz e Trimper [51].

Em cada passo de tempo o elefante move-se ou um passo para a direita ou para a esquerda.

$$x_{t+1} = x_t + \sigma_{t+1} , \quad (3.1)$$

onde  $\sigma_{t+1} = \pm 1$  representa um ruído estocástico que contém correlação de dois pontos (ou seja, memória). O elefante pode sempre lembrar da história inteira das direções prévias dos passos da caminhada  $\{\sigma_{t'}\}$  para  $t' \leq t$ . A seguir, resumo o modelo: No tempo  $t$  escolhemos aleatoriamente um tempo prévio  $1 \leq t' < t$  com probabilidades *a priori* iguais. Então, escolhemos a direção do passo atual  $\sigma_t$  baseado no valor de  $\sigma_{t'}$  da seguinte maneira:

$$\sigma_t = \begin{cases} +\sigma_{t'} & \text{com probabilidade } p \\ -\sigma_{t'} & \text{com probabilidade } 1 - p . \end{cases} \quad (3.2)$$

Sem perda de generalidade assumimos que o primeiro passo sempre vai para

a direita, i.e.  $\sigma_1 = +1$ . A posição no tempo  $t$  portanto segue:

$$x_t = x_0 + \sum_{t'=1}^t \sigma_{t'} = \sum_{t'=1}^t \sigma_{t'} \quad (3.3)$$

onde  $x_0 = 0$  e, assintoticamente, se encontra [51]

$$\langle x^2 \rangle = \begin{cases} \frac{t}{3-4p}, & p < 3/4 \\ t \ln t, & p = 3/4 \\ \frac{t^{4p-2}}{(4p-3)\Gamma(4p-2)} & p > 3/4 . \end{cases} \quad (3.4)$$

Como discutido na referência [51], existe um regime de escape ( $p > 3/4$ ) e um regime localizado ( $p < 1/2$ ), com  $p = 3/4$  sendo marginalmente, ou seja, logaritmicamente superdifusivo. Notavelmente, para  $1/2 < p < 3/4$ , o deslocamento médio quadrático diverge, embora menor do que o quadrado da média, de modo que o comportamento permanece difusivo. O deslocamento médio comporta-se como:

$$\langle x_t \rangle \sim t^{(2p-1)} . \quad (3.5)$$

Em adição à classificação do comportamento em termos de difusão normal versus anômala (definida pela transição em  $p = 3/4$ ), notamos que podemos também classificar [51, 52] as caminhadas como reformadores ( $p < 1/2$ ) que apresentam comportamento anti-correlacionado e tradicionalistas ( $p > 1/2$ ), que apresentam correlações positivas, isto é, possuem persistência. Os reformadores têm um deslocamento médio decaindo algebricamente, enquanto os tradicionalistas, apresentam deslocamento médio divergindo algebricamente. A solução deste problema é uma

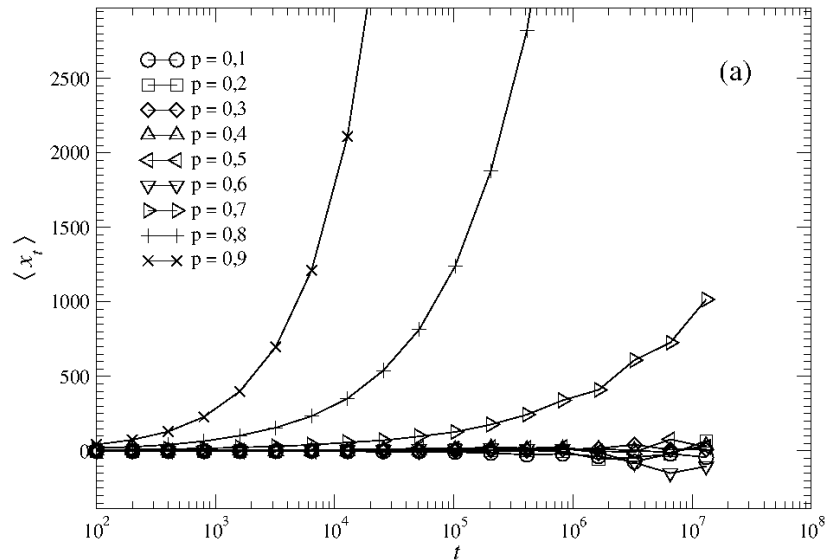
densidade de probabilidade Gaussiana com constante de difusão dependente de  $p$  e do tempo:

$$D(t, p) = \frac{1}{8p - 6} \left[ \left( \frac{t}{t_0} \right)^{4p-3} - 1 \right] \quad (3.6)$$

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t D(t, p)}} \exp \left( -\frac{(x - \bar{x}(t))^2}{4t D(t, p)} \right). \quad (3.7)$$

Ao variar o parâmetro  $p$  e também o expoente de escala  $H = 2p - 1$  observamos na Figura (3.1) o deslocamento médio e na Figura (3.2) o deslocamento quadrático médio como função do tempo. Para  $p > 3/4$  o comportamento é superdifusivo, enquanto para  $p < 1/2$  o deslocamento médio permanece pequeno.

Figura 3.1: Deslocamento médio versus o tempo para vários valores do tempo  $t$  [52].



A Figura (3.3) mostra o expoente de escala  $H$  do deslocamento quadrático médio, que de acordo com a teoria deveria seguir a Eq. (3.4). Percebe-se que os

resultados numéricos concordam com os resultados analíticos conhecidos.

Figura 3.2: Gráfico duplo log do deslocamento quadrático médio versus o tempo, para vários valores de  $p$ .  $H$  é obtido através das inclinações de cada curva [52].

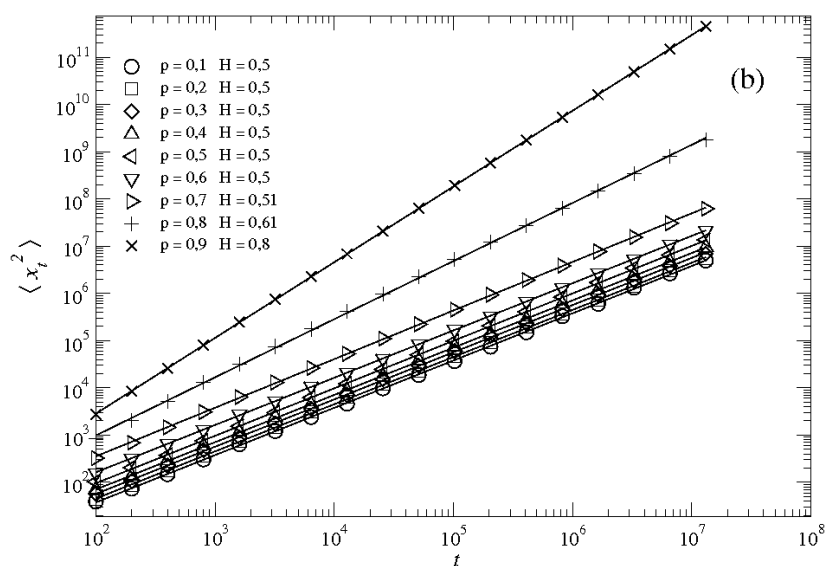
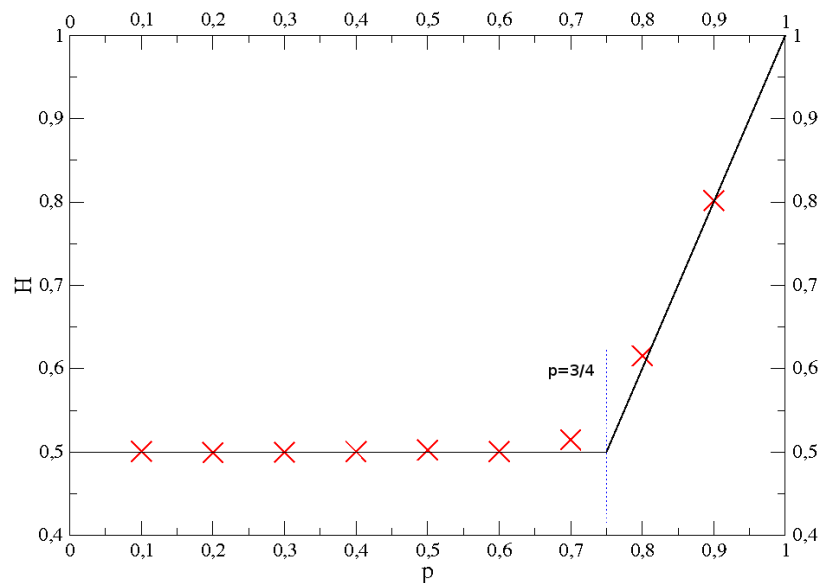


Figura 3.3: Expoente de Hurst variando com parâmetro de memória  $p$ . Como o esperado teoricamente, o comportamento muda qualitativamente próximo de  $p = 3/4$ . A linha preta mostra o resultado exato conhecido [52].



As Figuras (3.4) e (3.5) mostram a densidade de probabilidade da posição normalizada para (a) muitos valores do tempo  $t$  e (b) vários valores da probabilidade  $p$ . A renormalização da posição foi feita subtraindo o deslocamento médio medido,  $x - \langle x \rangle$ , e ao dividir a posição pelo desvio padrão teórico  $\sqrt{2tD(t,p)}$ , onde  $D(t,p)$  é dado pela Eq. (3.6) e é chamada constante de difusão. Verifica-se que existe um bom colapso de dados em uma distribuição Gaussiana.

Figura 3.4: Função densidade de probabilidade renormalizada de acordo com a Eq. 3.7 para  $p = 0,7$  constante e coeficiente de difusão ( $D(t)$ ) para todo  $t$  [52].

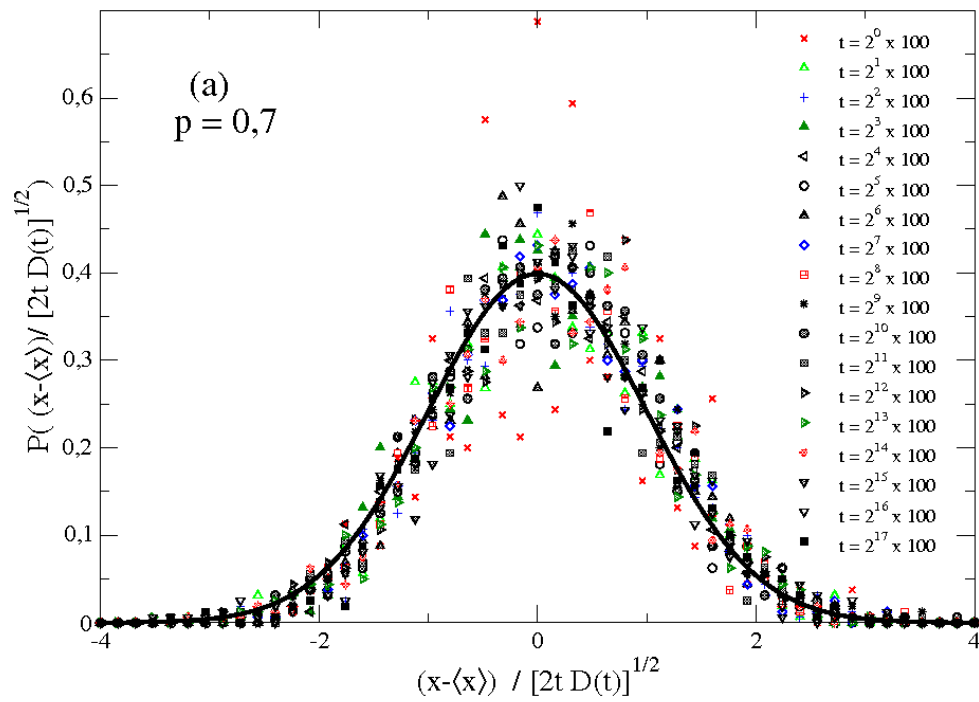
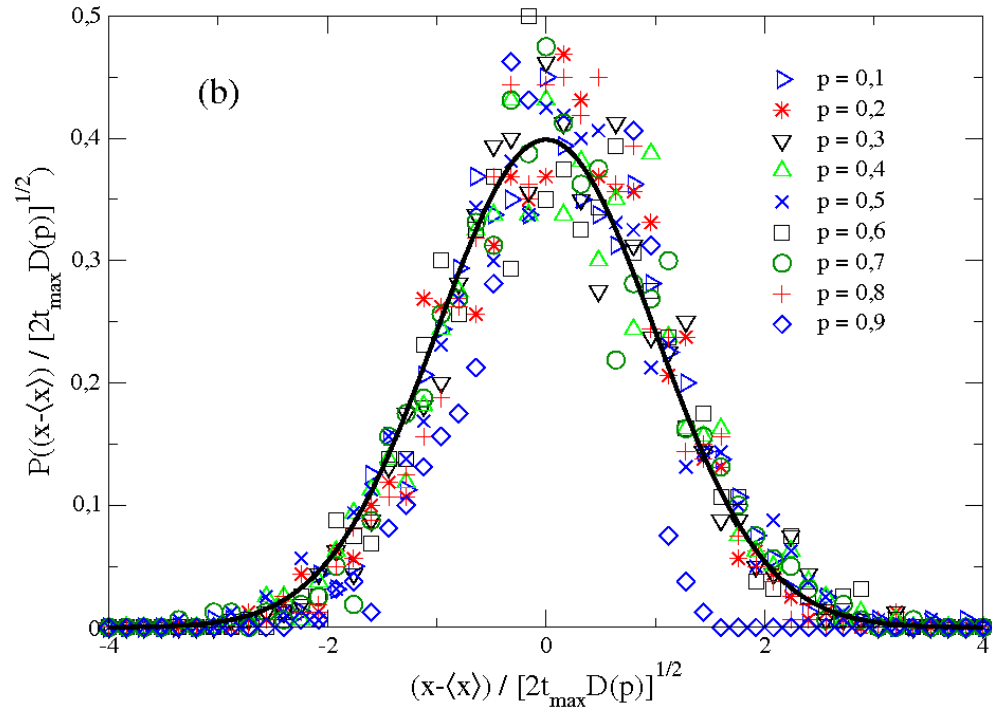


Figura 3.5: Função densidade de probabilidade renormalizada de acordo com a Eq. 3.7 para  $p$  variável e coeficiente de difusão  $D(p)$  estacionário. Tanto nesta figura quanto na Figura 3.4 é possível observar a existência de um colapso em uma função densidade de probabilidade Gaussiana [52].



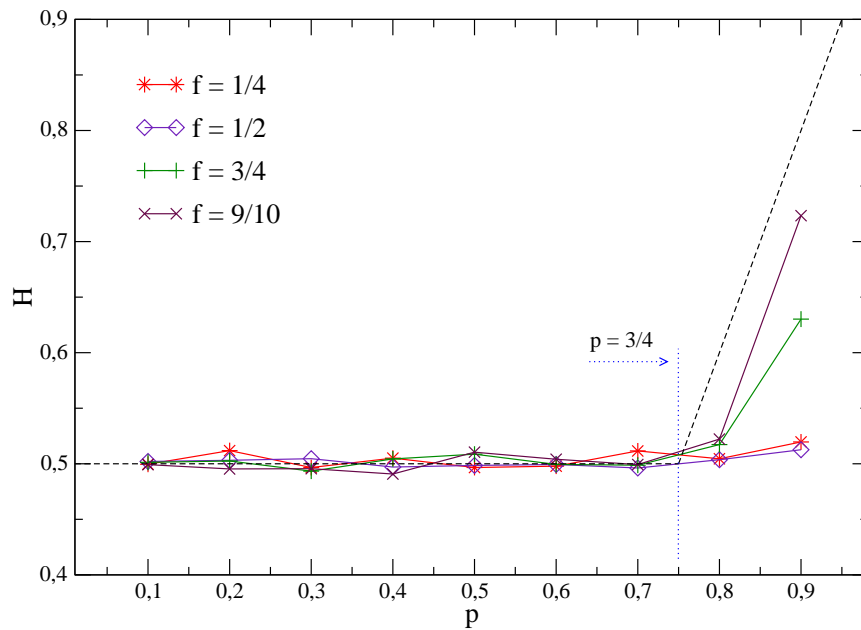
### 3.3 Persistência amnesicamente induzida

#### O caso amnésico

Nesta seção é considerado que o caminhante lembra apenas uma fração  $f$  das direções dos passos prévios no tempo  $t$ . Agora a memória possui um alcance limitado  $R = ft$ , sendo  $f < 1$ . Para  $f = 1$  recuperamos o modelo original do elefante. Esta nova consideração fornece um modelo de memória limitada [52]. Apesar disso, pode ocorrer a situação não-Markoviana no sentido de não haver nenhuma escala característica de memória. Analisando a Figura (3.6) é possível ver o expoente do deslocamento quadrático médio variando quando o alcance de memória é reduzido.

À medida que  $f$  torna-se menor o modelo converge para um comportamento Markoviano. Entretanto, o resultado mais interessante surge para valores de  $p > 3/4$ , onde é obtido superdifusão ( $H > 1/2$ ). Porém, apesar de  $p > 3/4$  o comportamento volta a ser difusivo ( $H = 1/2$ ).

Figura 3.6: O expoente de Hurst como função do parâmetro de memória  $p$ . Quando  $f$  aproxima-se de um, recuperamos o modelo do elefante. Para pequenas frações tais como  $f = 1/2$  e  $f = 1/4$ , este modelo não-Markoviano torna-se Markoviano com memória de curto alcance [52].



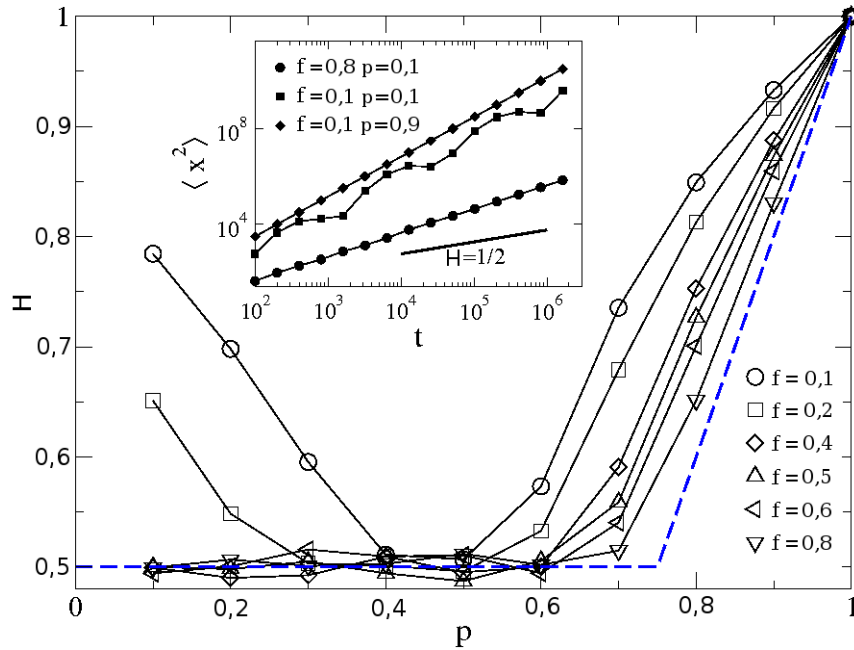
A partir destes resultados, surgem outras questões interessantes. Para quais valores de  $f$  obtemos necessariamente  $H = 1/2$ ? Como  $f$  depende de  $p$ ? E como o ponto crítico  $p = 3/4$  comporta-se em função de  $f$ ? Estas questões são discutidas nas seções seguintes.



## Caminhada de Alzheimer

Consideramos agora um caminhante aleatório que pode lembrar apenas uma fração inicial  $ft$  das direções dos passos no tempo  $t$  [53]. Neste modelo, para  $f < 1$ , o caminhante, enquanto permanecer não-Markoviano, nunca lembrará da história completa. Analizamos como  $\langle x^2 \rangle$  escala com  $t$ , quando função de  $f$  e  $p$ . Na Figura (3.7), observamos como o expoente de escala  $H$  varia quando se reduz o alcance da memória. Quando  $f \rightarrow 0$  é obtido um resultado inesperado: mesmo reformadores ( $p < 1/2$ ) que tendem a compensar o comportamento passado, torna-se persistente ( $H > 1/2$ ). A perda de memória do passado recente parece causar persistência para valores de  $p$  que no modelo de memória completa não ocorria. Em contraste, a persistência diminui mais para perda de memória do passado distante do que do passado recente [52]. É encontrado que enquanto valores  $p < 1/2$  sempre se opõem a comportamento persistente, no caso  $f = 1$  persistência surge para  $f$  suficientemente pequeno mesmo para reformadores. Esta persistência emerge como um resultado de oscilações log-periódicas (veja o caso  $f = p = 0, 1$  na caixa da Figura (3.7) De modo geral, perda de memória recente aumenta persistência para o alcance inteiro de  $p \neq 1/2$ .

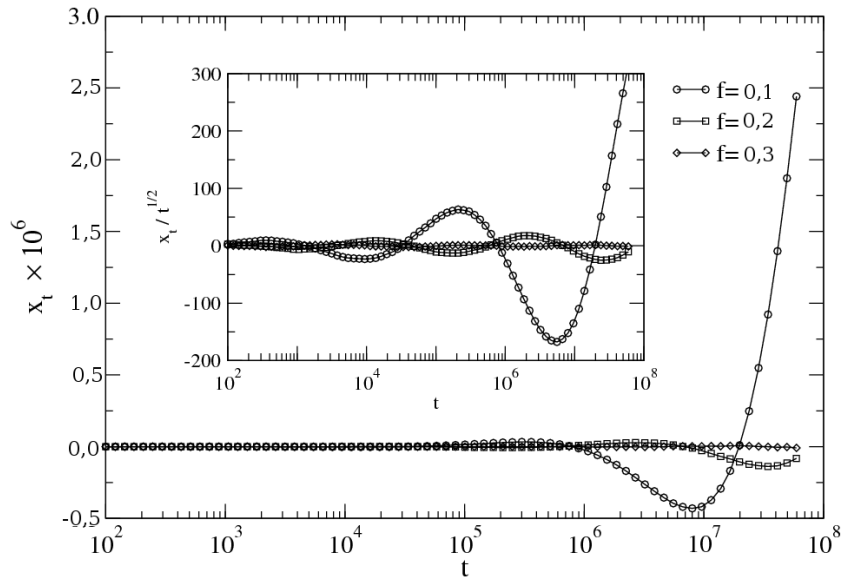
Figura 3.7: Persistência da caminhada, representada pelo expoente de Hurst  $H$  como função de  $p$  e da fração  $f$  do tempo total lembrado por caminhantes não-Markovianos que esquecem os mais recentes passos no tempo  $(1-f)t$ . A linha tracejada mostra o resultado analítico conhecido [52] para o caso  $f = 1$ . A caixa mostra  $\langle x^2 \rangle$  para valores escolhidos de  $p$  e  $f$  a partir do qual foi estimado  $H$  [53].



Para pequenos  $f$  e  $p < 1/2$ , o caminhante aleatório tenta mover-se oposto a direção média escolhida nos primeiros  $ft$  passos no tempo. Ele realiza  $t(1-f)/f$  passos para o efeito da ação realizada no tempo  $t$  presente entrar no alcance de memória acessível. Assim, o comportamento torna-se persistente, porque a posição média oscila com grande amplitude quando  $t \rightarrow \infty$ . As oscilações log-periódicas evidenciam expoentes de escala complexos, caracterizando a existência de invariância de escala discreta. A Figura (3.8) mostra as oscilações log-periódicas. Vemos que a amplitude de oscilação torna-se maior para pequenos  $f$ , enquanto que para  $f$  relativamente grande, as oscilações desaparecem.

A solução analítica para o expoente de Hurst como função de  $f$  e  $p$  requer resolver a relação de recorrência no qual os momentos  $\langle x^q \rangle$  no tempo  $t+1$  dependem

Figura 3.8: Deslocamento  $x_t$  como função de  $t$  para  $p = 0, 1$  e vários  $f$ . Na caixa temos  $x_t/t^{1/2}$  versus o tempo. Perda de memória significativa (pequenos  $f$ ) leva a oscilações log-periódicas com grande amplitude [53].



não apenas de seus valores no tempo  $t$  mas também de seus valores no tempo  $ft$  no passado distante. A solução analítica é apresentada na próxima seção.

## Quebra espontânea de simetria

Nesta subseção, estudamos propriedades de simetria em diagramas de fase para um fenômeno de persistência amnesicamente induzida [54, 55], que permite superdifusão log-periódica [23] dirigida por feedback negativo. É mostrado que a invariância de escala em simetria contínua é quebrada em simetria discreta, entretanto, a linha crítica separando o regime superdifusivo log-periódico do regime difusivo, representa uma segunda transição de fase.

O deslocamento quadrático médio  $\langle x^2 \rangle$  de caminhadas aleatórias sem memória escalam com o tempo  $t$  através da equação  $\langle x^2 \rangle \sim t^{2H}$ , sendo o expoente de Hurst

$H = 1/2$ , assim como o exigido pelo teorema do limite central e assumindo momentos finitos. Assumindo valores  $H > 1/2$ , o expoente de Hurst indica persistência, evidenciando memória de longo alcance. Havendo ou não memória invariância de escala contínua existe na maioria das caminhadas aleatórias, ou seja, uma transformação de escala contínua por um fator de zoom  $\lambda$  deixa o expoente de Hurst inalterado; ou seja,  $t^{2H} \rightarrow \lambda^{2H} t^{2H}$  quando temos  $t \rightarrow \lambda t$ . A Figura (3.9) mostra valores de  $H(f, p)$  estimado por simulação, como função do parâmetro de feedback  $p$  e da fração da memória  $f$ . É escolhido  $2H - 1$  como o parâmetro de ordem que têm valores positivos apenas no regime persistente. O regime persistente compreende duas fases com propriedades distintas de simetria. Para  $p > 1/2$  temos persistência clássica, satisfazendo invariância de escala por simetria contínua.

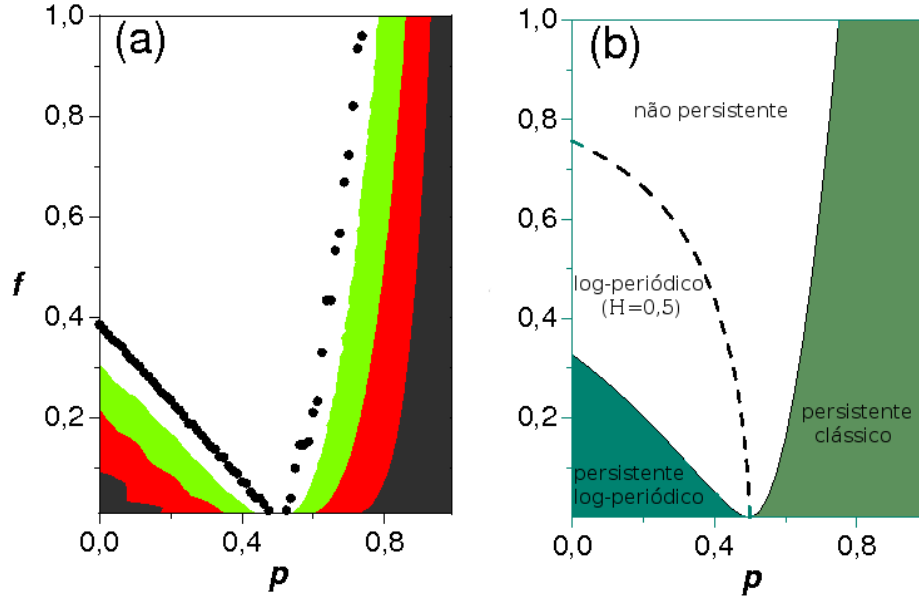
Em contraste, para  $p < 1/2$  é encontrado invariância de escala por simetria discreta [23], que ocorre para valores discretos de zoom  $\lambda_k = \lambda^k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ). O regime não-persistente permite tanto crescimento monotônico, quanto log-periódico. Esta quebra espontânea de simetria indica uma fase distinta e elimina a possibilidade de uma transição de ordem infinita [4].

Agora é abordado a solução analítica. Temos  $\sigma_{\nu} = \pm 1$  e usamos a relação de recorrência descrita pela Eq. (3.1). Sejam  $n_f(t)$  e  $n_b(t)$  o número de passos no tempo, tomados para a frente e para trás, respectivamente, e o número total de passos será

$$n_f(t) + n_b(t) = t. \quad (3.8)$$

Para memória completa, a probabilidade de tomar um passo para frente no tempo

Figura 3.9: (a) O expoente de Hurst  $H(f, p)$  estimado por simulação de uma caminhada não-Markoviana que relembra apenas uma fração de seu passado distante, com parâmetro de feedback negativo  $p$ . Quanto ao esquema de cores temos que:  $H < 0,6$  (branco),  $0,6 < H < 0,7$  (verde),  $0,7 < H < 0,9$  (vermelho),  $H > 0,9$  (preto). Os pontos cheios mostram o limite para  $H = 1/2$ . Persistência surge para feedback positivo ( $p > 1/2$ ) e negativo ( $p < 1/2$ ). (b) Diagrama de fase completo mostrando 4 regimes, criado de acordo com as soluções exatas da Eq. (3.26) e Eq. (3.29). A linha tracejada  $f_0(p)$  delinea o limite para log-periodicidade e separa o regime não persistente em dois [54].



$t + 1$ , para  $t \geq 1$ , é

$$P_{eff}^+(t) = \frac{n_f(t)}{t}p + \frac{n_b(t)}{t}(1 - p), \quad (3.9)$$

e similarmente,

$$P_{eff}^-(t) = \frac{n_b(t)}{t}p + \frac{n_f(t)}{t}(1 - p), \quad (3.10)$$

então, o valor efetivo esperado é

$$\sigma_{t+1}^e = P_{eff}^+(t) - P_{eff}^-(t). \quad (3.11)$$

Desde que  $x_t = n_f(t) - n_b(t) + x_0$ , obtemos

$$\sigma_{t+1}^e = \alpha \frac{x_t - x_0}{t}, \quad (3.12)$$

onde  $\alpha = 2p - 1$ . Com perda de memória o alcance de memória é  $R = R(t) = \text{int}(ft)$

onde  $0 < f \leq 1$ , em analogia aos resultados acima, é obtido

$$\sigma_{t+1}^e = \alpha \frac{x_R - x_0}{R}. \quad (3.13)$$

A partir da Eq. (3.1), podemos analisar o  $n$ -ésimo momento de  $x_t^n$ .

$$x_{t+1}^n = (x_t + \sigma_{t+1})^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \sigma_{t+1}^i x_t^{n-i}. \quad (3.14)$$

Para todo  $i$  par, temos  $\sigma_{t+1}^i = 1$  e para expoentes ímpares  $\sigma_{t+1}^i = \sigma_{t+1}$ . Usando a Eq. (3.13), com  $x_0 = 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} \langle x_{t+1}^n \rangle &= \Delta + \langle x_t^n \rangle + \frac{n\alpha}{R} \langle x_R x_t^{n-1} \rangle + \\ &\sum_{l=1}^{s(n)} \left[ \binom{n}{2l} \langle x_t^{n-2l} \rangle + \frac{\alpha}{R} \binom{n}{2l+1} \langle x_R x_t^{n-2l-1} \rangle \right], \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde

$$\Delta = \frac{1 + (-1)^n}{2} = \begin{cases} +1, & \forall n \text{ par} \\ 0, & \forall n \text{ ímpar} \end{cases} \quad (3.16)$$

e  $s(n) = \frac{n-\Delta-1}{2}$ . Se  $s(n) < 1$ , então a soma Eq. (3.15) desaparece. No limite

assintótico, ou seja,  $\langle x_{t+1}^n \rangle - \langle x_t^n \rangle$ , chegamos a seguinte equação diferencial para os momentos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x_t^n \rangle &= \Delta + \frac{n\alpha}{R} \langle x_R x_t^{n-1} \rangle + \\ &\sum_{l=1}^{s(n)} \left[ \binom{n}{2l} \langle x_t^{n-2l} \rangle + \frac{\alpha}{R} \binom{n}{2l+1} \langle x_R x_t^{n-2l-1} \rangle \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Para o primeiro momento ( $n = 1$ ), é obtido uma equação idêntica a obtida por Kenkre [55],

$$\frac{d}{dt} \langle x_t \rangle = \frac{\alpha}{ft} \langle x_{ft} \rangle, \quad (3.18)$$

como solução, considerando uma expansão da forma

$$\langle x_t \rangle \sim \sum_i A_i t^{\delta_i} \sin(B_i \ln(t) + C_i), \quad (3.19)$$

é obtido um sistema de equações transcendentais para  $B$  e  $\delta$ :

$$\delta = \alpha f^{\delta-1} \cos(B \ln f), \quad (3.20)$$

$$B = \alpha f^{\delta-1} \sin(B \ln f). \quad (3.21)$$

Para  $\alpha \geq 0$  ( $p \geq 1/2$ ), a Eq. (3.20) fornece um valor máximo para  $\delta$  quando  $B = 0$ , que automaticamente satisfaz a Eq. (3.21), não havendo oscilações. Note que a solução balística ( $p = 1$ ), força  $B = 0$  para qualquer  $f$ . Para  $\delta > 1/2$ , obtemos superdifusão. A Eq. (3.20) torna-se

$$\delta = \alpha f^{\delta-1}, \quad (3.22)$$

cujas soluções existem para  $f > f_0(p)$ . Resolvido numericamente [54] para  $p = 0$ , é obtido  $f_0(0) = 0,7569$  e verificado em perfeita concordância com a expressão

$$(1 - 2p) \ln(1/f_0) = f_0/e \quad (3.23)$$

obtida na referência [55]. Para  $\alpha < 0$ , existe um limite definido por um conjunto contínuo de valores  $(p, f)$ , com soluções oscilantes.

Agora, calculamos o segundo momento. Para  $n = 2$ , temos  $\Delta = 1$  e  $s(n) = 0$ , assim a Eq. 3.17 torna-se

$$\frac{d}{dt} \langle x_t^2 \rangle = 1 + \frac{2\alpha}{ft} \langle x_{ft} x_t \rangle. \quad (3.24)$$

Usando o fato que  $|\langle x_t^2 \rangle| \leq (\langle x^2 \rangle)^{1/2}$ , pode-se mostrar que existe uma função  $A(t)$  tal que  $\langle x_{ft} x_t \rangle = A(t) (\langle x_{ft}^2 \rangle \langle x_t^2 \rangle)^{1/2}$ , com  $-1 \leq A(t) \leq 1$ . Para  $\alpha \geq 0$ , nenhuma oscilação aparece e  $A(t \rightarrow \infty) = 1$ . Assim, é possível obter uma relação transcendental para o expoente de Hurst, assintoticamente:

$$H = \alpha f^{H-1}, \quad (3.25)$$

Conseqüentemente, a curva

$$f_c = 16(p_c - 1/2)^2, \quad (3.26)$$

separa a região difusiva da anômala para  $p \geq 1/2$ , no plano  $(p, f)$  da Figura 3.9(b). O caso  $f = 1$  nos fornece  $p_c = 3/4$ , em concordância com a referência [51]. Para



$\alpha < 0$ , temos que a solução para o segundo momento Eq. (3.24) é dado pela expansão

$$\langle x_t^2 \rangle \sim \sum_i a_i t^{2H_i} \sin^2(b_i \ln(t) + c_i). \quad (3.27)$$

É assumido que os termos dominantes de  $\langle x_t \rangle$  e  $\langle x_t^2 \rangle$  possuem o mesmo período e a mesma fase, ou seja,  $b = B$  e  $c = C$ . Na região log-periódica (i.e.  $b \neq 0$  e  $H \geq \delta$ ) a solução é dada pela Eq. (3.20) e Eq. (3.21), onde o expoente de Hurst satisfaz

$$H = \frac{\sqrt{\alpha^2 f^{(2H-2)} - H}}{\tan[\ln(f) \sqrt{\alpha^2 f^{(2H-2)} - H}]} \quad (3.28)$$

A linha de separação entre os regimes difusivo e anômalo Figuras (3.9 e 3.10) corresponde a solução da Eq. (3.28), para  $H = \delta = 1/2$ :

$$2\sqrt{\frac{\alpha_c^2}{f_c} - \frac{1}{4}} = \tan \left[ \ln(f_c) \sqrt{\frac{\alpha_c^2}{f_c} - \frac{1}{4}} \right]. \quad (3.29)$$

Assim, é obtido o valor crítico de  $f_c(0) = 0,3284$  para o surgimento de superdifusão log-periódica. Note que  $p_c = 1/2$ ,  $f_c = 0$  representa um ponto multi crítico. A Figura 3.9(b) mostra um diagrama de fase, consistindo de 4 fases. A Figura (3.10) torna mais claro como o parâmetro de ordem  $2H - 1$  depende de  $p$  e  $f$ . A região superdifusiva está inteiramente na região log-periódica.

A partir da Eq. (3.20) e Eq. (3.21) obtém-se a log-frequência angular

$$B = \alpha f^{[B/\tan(B \ln(f)) - 1]} \sin(B \ln(f)), \quad (3.30)$$

onde, na Figura (3.11) é possível ver como  $B$  comporta-se em função de  $p$  e  $f$ .

A seguir temos a dedução da equação Fokker-Planck (EFP) [28].

Figura 3.10: Parâmetro de ordem  $2H - 1$  versus  $p$  e  $f$  na região superdifusiva. Estimado usando as Eq. (3.25) e Eq. (3.28) [54].

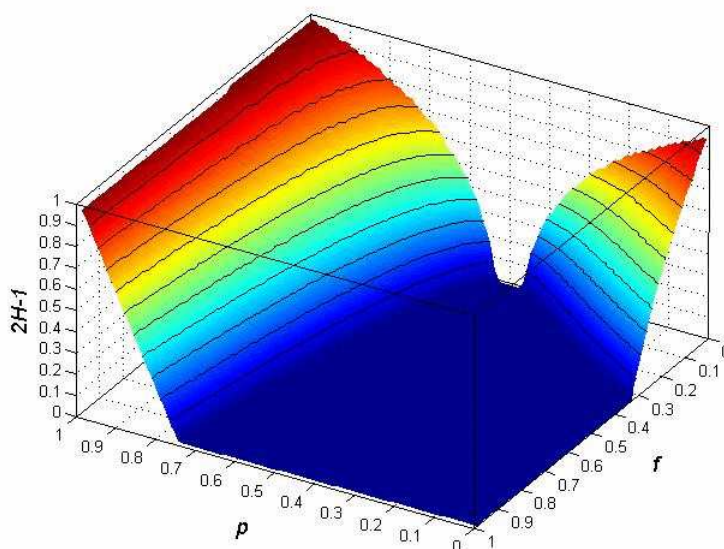
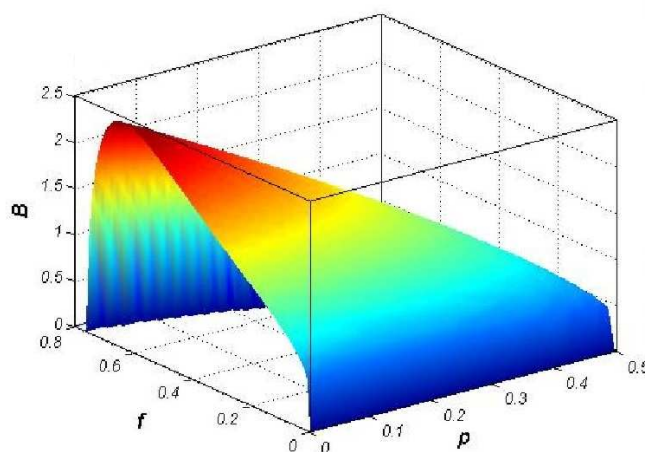


Figura 3.11: A frequência angular log-periódica  $B(f, p)$  quantifica uma transição de fase que quebra invariância de escala por simetria contínua ( $B = 0$ ) em simetria discreta ( $B > 0$ ), fazendo surgir a log-periodicidade [54].



### 3.4 Equação de Fokker-Planck (EFP)

Chamemos de  $Y$  uma certa posição de um indivíduo. A probabilidade condi-

cional de que o indivíduo esteja na posição  $Y$  num tempo  $t + 1$ , dado que ele estava na posição  $X_0$  no tempo  $t = 0$  é dada por:

$$P(Y, t + 1 | X_0, 0) = P(Y + 1, t | X_0, 0)P_{eff}^-(t, Y + 1) + P(Y - 1, t | X_0, 0)P_{eff}^+(t, Y - 1). \quad (3.31)$$

Utilizando as definições de  $n_f(R)$  e  $n_b(R)$ , e da Eq. (3.9) e Eq. (3.10) obtemos:

$$P_{eff}^+(t, Y) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\alpha G(Y)}{R} \right], \quad (3.32)$$

e

$$P_{eff}^-(t, Y) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\alpha G(Y)}{R} \right], \quad (3.33)$$

onde  $X_R - X_0 = G(Y)$  é o deslocamento até o tempo  $L$ , sendo  $G$  a função que correlaciona  $X_R$  com  $Y$ , pois  $Y$  é a posição no tempo  $t$  quando a posição no tempo  $L$  é  $X_R$ . Substituindo a Eq. (3.32) e Eq. (3.33) na Eq. (3.31), obtemos:

$$\begin{aligned} P(Y, t + 1 | X_0, 0) &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\alpha G(Y + 1)}{R} \right] P(Y + 1, t | X_0, 0) \\ &+ \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\alpha G(Y - 1)}{R} \right] P(Y - 1, t | X_0, 0). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Introduzindo a notação  $P(x, t) = P(Y, t | X_0, 0)$  e subtraindo  $P(x, t)$  de ambos os membros da equação acima, após um rearranjo de termos, obtemos:

$$\begin{aligned}
P(x, t+1) - P(x, t) &= \frac{P(x+1, t) - 2P(x, t) + P(x-1, t)}{2} \\
&- \frac{\alpha}{R} \left[ \frac{G(x+1)P(x+1, t) - G(x-1)P(x-1, t)}{2} \right].
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Desta equação, no limite assintótico para  $t$  e  $Y$ , obtemos a equação de Fokker-Planck para o deslocamento  $x = Y - X_0$ :

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) - \frac{\alpha}{R} \frac{\partial}{\partial x} [G(x)P(x, t)]. \tag{3.36}$$

Como  $ft \gg 1$ , então  $R = ft$  e  $x_{ft} = G(x)$ , assim podemos escrever:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) - \frac{\alpha}{ft} \frac{\partial}{\partial x} [x_{ft}P(x, t)], \tag{3.37}$$

onde  $x_{ft}$  é o deslocamento num tempo passado  $ft$  que leva à um deslocamento  $x$  no futuro, no tempo  $t$ .

O deslocamento  $x_{ft}$  pode ser correlacionado com o deslocamento  $x = x_t$  através de uma função estocástica  $h(f, x, t)$  dependente de  $f$ , tal que  $x_{ft} = xh(f, x, t)$ . Observe que a função  $h(f, x, t)$  pode ser negativa. Com essa definição, o valor médio de  $x_{ft}$  pode ser escrito como:

$$\langle x_{ft} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} xh(f, x, t)P(x, t)dx. \tag{3.38}$$

Porém, por definição, o valor médio de  $x_{ft}$  é dado por:

$$\langle x_{ft} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} xP(x, ft)dx. \quad (3.39)$$

Comparando com a Eq. (3.38) e Eq. (3.39), escrevemos:  $h(f, x, t)P(x, t) = P(x, ft) + g(f, x, t)$ , onde  $g(f, x, t)$  é uma função tal que  $\int_{-\infty}^{+\infty} xg(f, x, t)dx = 0$ . Assim, obtemos:

$$h(f, x, t) = \frac{P(x, ft)}{P(x, t)} + \frac{g(f, x, t)}{P(x, t)}. \quad (3.40)$$

Note que para  $f = 1$ ,  $h(1, x, t) = 1$  e, portanto  $g(1, x, t) = 0$ . Para um caso geral  $g(f, x, t)$  não é necessariamente nula. Substituindo a Eq. (3.40) na relação entre  $x_{ft}$  e  $x$ , e posteriormente na Eq. (3.37) obtemos [28]:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) - \frac{\alpha}{ft} \frac{\partial}{\partial x} [x(P(x, ft) + g(f, x, t))]. \quad (3.41)$$

Quando  $f = 1$ , a equação acima se reduz imediatamente à equação ao caso de memória completa [51].

Para análise do primeiro momento apenas, podemos escolher  $g(f, x, t) = 0$ , pois não afeta o valor médio  $\langle x_{ft} \rangle$  por definição. Porém, para o segundo momento este se torna importante como passamos a demonstrar. O segundo momento pode ser escrito na seguinte forma:  $\langle x^2 \rangle = \langle x_{ft}^2 \rangle + 2\langle x_{ft}\Delta x \rangle + \langle \Delta x^2 \rangle$ , onde  $\Delta x = x - x_{ft}$ . No caso de uma caminhada aleatória tradicional  $\langle x_{ft}\Delta x \rangle = 0$ , porém isso não é válido para sistemas com memória. Para encontrar a relação entre  $\langle x_{ft}\Delta x \rangle$  e  $g(f, x, t)$ , escrevemos a correlação  $\langle xx_{ft} \rangle$ :

$$\begin{aligned}
\langle xx_{ft} \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 h(f, x, t) P(x, t) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 P(x, ft) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(f, x, t) dx \\
&= \langle x_{ft}^2 \rangle + \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(f, x, t) dx , \tag{3.42}
\end{aligned}$$

sendo  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(f, x, t) dx$ , em geral, não nula. Como  $\langle xx_{ft} \rangle = \langle (x_{ft} + \Delta x)x_{ft} \rangle = \langle x_{ft}^2 \rangle + \langle x_{ft}\Delta x \rangle$ , obtemos:  $\langle x_{ft}\Delta x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(f, x, t) dx$ , a qual pode ser uma função correlação que alterna de sinal com o tempo, que é o caso na região onde tem log-periodicidade. Como o segundo momento depende dessa correlação, este também dependerá de  $g(f, x, t)$ .

# Capítulo 4

## Expoentes críticos: resultados exatos

### 4.1 Introdução

Os conceitos de escala (*scaling*) [4, 6, 19], fractais [5, 7, 8, 57, 58], universalidade e renormalização [6, 10], historicamente conduzem a grandes avanços não apenas no estudo de caminhadas aleatórias e difusão anômala [13, 14, 15, 18, 19], mas também no estudo de transições de fase e fenômenos críticos [4, 10, 34]. Podemos caracterizar como transição de fase um fenômeno no qual uma pequena variação do parâmetro de ordem implica em variação apreciável do comportamento do sistema. Podemos observar uma transição de fase através de quantidades físicas como o calor específico, a susceptibilidade, entre outras. Estas quantidades apresentam um comportamento singular em regiões próximas a transição, permitindo-nos detectá-las e estudá-las qualitativamente. Algumas tentativas de generalizar o conceito de mu-

dança de fase foram feitas e lavaram a um progresso substancial, mas foi com a noção de parâmetro de ordem, introduzida em 1937 por Landau que ocorreu avanços significativos no estudo das transições. Landau associava à transição fase uma mudança nas propriedades de simetria e a esta vinculou a noção de parâmetro de ordem.

Neste capítulo apresento resultados numéricos e analíticos de seis expoentes críticos que caracterizam as transições de fase entre os regimes difusivo anômalo (log-periódico e tradicional) e normal (log-periódico e tradicional).

## Log-periodicidade

Estudos da assinatura acústica (ruído acústico), realizados no tanque de pressão do foguete espacial European Ariane (explodido catastroficamente durante seu lançamento em 1996), demonstraram comportamento log-periódico. Este tipo de evento despertou a curiosidade quanto a relevância da presença de log-periodicidade na capacidade de previsão da catástrofe [23].

Incentivado por tal observação da log-periodicidade em fenômenos de ruptura, Sornette investigou se características similares poderiam ser observadas em outros sistemas. Uma observação mais cuidadosa revelou tais características em muitos sistemas que tinham sido previamente insuspeitos. Este trabalho conduziu à visão de que a invariância de escala e seus associados expoentes complexos juntamente à log-periodicidade, poderiam aparecer “espontaneamente” em sistemas naturais, isto é, sem a necessidade de uma hierarquia pré-existente.

Matematicamente, log-periodicidade surge quando o expoente de escala é



complexo, induzindo ao aparecimento de Invariância de Escala Discreta (IED) [28].

$$\begin{aligned}
 t^z &= t^{a+ib} \\
 &= t^a [e^{ib \ln(t)}] \\
 &= t^a [\cos(b \ln(t)) + i \sin(b \ln(t))] ,
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

indicando log-periodicidade.

Por exemplo, ao analisarmos a Eq. (1.1) para o deslocamento quadrático médio, se considerarmos que o expoente de Hurst seja complexo, e substituindo o resultado da Eq. (4.1) teremos a situação em que o deslocamento quadrático médio apresentará log-periodicidade, ou seja

$$\mathbb{R}e \langle x^2(t) \rangle = t^a [\cos(b \ln(t))] ,
 \tag{4.2}$$

onde  $b$  é a frequência das oscilações.

A IED é uma forma mais restritiva de invariância, pois existe apenas para valores específicos do fator de *zoom* que ocorre em  $\lambda = \lambda_n$ . Substituindo na Eq. (4.2)  $t \rightarrow \lambda_n t$  encontramos,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{R}e \langle x^2(\lambda_n t) \rangle &= \mathbb{R}e(\lambda_n t)^{(a+ib)} \\
 &= (\lambda_n t)^a \cos[b \ln(\lambda_n t)]
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

ou seja, a parte real do deslocamento quadrático médio passa a ser escrito como um termo lei de potência e um log-periódico.

Neste trabalho, investigamos duas transições distintas: um parâmetro de ordem que quantifica log-periodicidade e invariância por escala discreta no primeiro momento do propagador, ao passo que o segundo parâmetro de ordem, conhecido como expoente de Hurst, descreve o crescimento do segundo momento [17]. Relatamos resultados numéricos e analíticos para seis expoentes críticos, que juntos, caracterizam completamente as propriedades das transições [28].

Mesmo o primeiro e o segundo momento da função densidade de probabilidade  $P(x, t)$  comportam-se de maneira inesperada, como pode ser visto a partir do fato que as propriedades estatísticas dessas caminhadas aleatórias serem descritas por equações transcendentais [54]. Especificamente, o primeiro momento pode levar a oscilações log-periódicas, com  $B$  descrevendo uma log-frequência.

$$B = \alpha f^{[B/\tan(B \ln f)]-1} \sin(B \ln f) . \quad (4.4)$$

Para  $p > 1/2$ , o expoente de Hurst ( $H$ ) para o segundo momento satisfaz,

$$H = \alpha f^{(H-1)} . \quad (4.5)$$

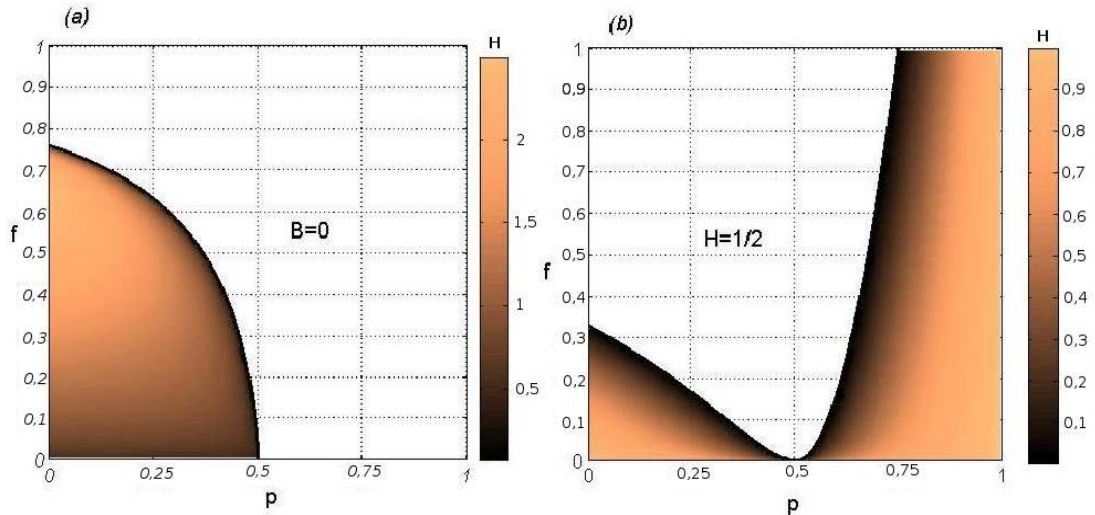
Em contraste, para  $p < 1/2$  a equação transcendental contém funções trigonométricas de logaritmos e leis de potências, similar a Eq. (4.4):

$$H = \frac{\sqrt{\alpha^2 f^{(2H-2)} - H^2}}{\tan \left[ \ln(f) \sqrt{\alpha^2 f^{(2H-2)} - H^2} \right]} . \quad (4.6)$$

Reportamos expoentes críticos que caracterizam o diagrama de fases Figura (4.1) para caminhadas aleatórias com dependência em sua história completa e

parcial dos passos.

Figura 4.1: Diagrama de fase completo para caminhadas não-Markovianas induzidas annesicamente, onde  $p$  representa o parâmetro de feedback e  $f$  a fração da história lembrada pelo caminhante. (a) plot da frequência log-periódica  $B$  do primeiro momento da função densidade de probabilidade para o caminhante e (b) o plot de  $2H - 1$  onde  $H$  denota o expoente de Hurst, relacionado ao segundo momento. O modelo possui quatro fases (regimes) diferentes, como mencionado na referência [54]: (i) difusão normal ( $B = 0$ ,  $H = 1/2$ ), (ii) difusão normal log-periódica ( $B > 0$ ,  $H = 1/2$ ), (iii) superdifusão clássica ( $B = 0$ ,  $H > 1/2$ ) e (iv) superdifusão log-periódica ( $B > 0$ ,  $H > 1/2$ ). Este rico comportamento surge da interação entre feedback e estocasticidade [28, 29].



## 4.2 Primeiro momento: frequência log-periódica

Em analogia com transições de fase de segunda ordem para sistemas em equilíbrio termodinâmico, questionamos como o parâmetro de ordem  $B$  comporta-se

no início da log-periodicidade, ou seja, com qual expoente crítico  $\beta$  e  $\delta$  eles escalam:

$$B \sim (p_c - p)^\beta , \quad (4.7)$$

$$B \sim (f_c - f)^\delta . \quad (4.8)$$

A partir da Eq. (4.4) podemos obter uma expressão para  $B$  na qual torna-se exata quanto mais próximo da linha crítica. O detalhamento destes cálculos pode ser visto na seção 5.1 do capítulo 5.

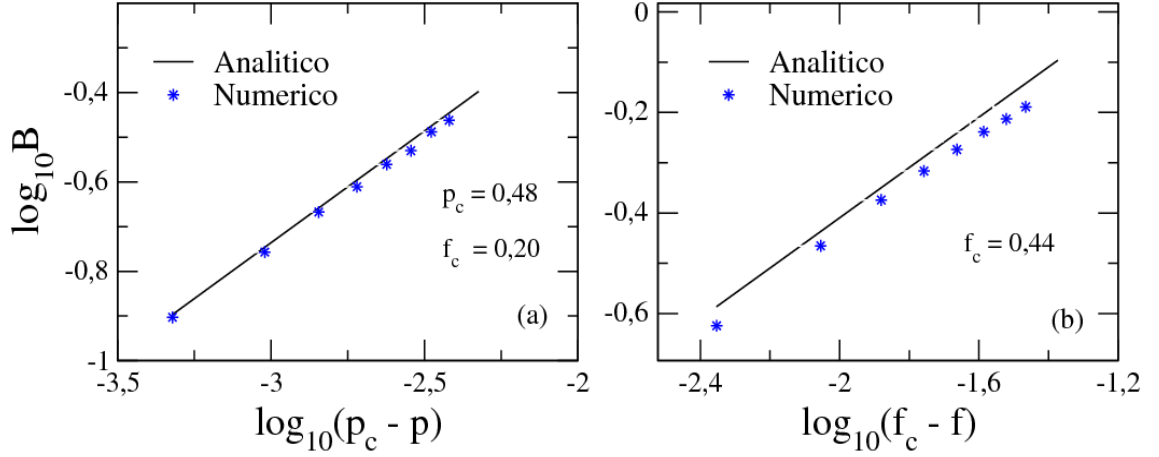
$$B = \sqrt{\frac{4}{\alpha_c (\ln(f_c))^2} (p - p_c)} , \quad (4.9)$$

$$B = \sqrt{\frac{2}{f_c (\ln(f_c))^2} \left( \frac{1}{\ln(f_c)} - 1 \right) (f_c - f)} , \quad (4.10)$$

da qual nós imediatamente vemos que ambos expoentes críticos são iguais a  $1/2$ .

As Figuras 4.2 (a), (b) comparam o comportamento estimado numericamente de  $B$  com o resultado analítico, relativo a  $p$  e  $f$  respectivamente. Os valores das variáveis  $p$  e  $f$  são escolhidos próximos da linha crítica. Usamos um pequeno fator ( $p_e$  ou  $f_e$ ) para garantir que os pontos estejam próximos da linha crítica. Por exemplo, se escolhermos  $p_e = 1.01$  então podemos encontrar  $p_i$  próximo a linha crítica através da expressão  $p_i = p_c * (p_e)^i$ , variando o índice  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Para todas as Figuras (4.2) e (4.3) foi usado o mesmo método de obtenção dos pontos próximos a linha crítica.

Figura 4.2: Duplo log plot do parâmetro de ordem  $B$  versus (a)  $p_c - p$  e (b)  $f_c - f$  em pontos específicos da linha crítica, obtidos numericamente e analiticamente, através das equações (4.9) and (4.10). Os expoentes críticos são iguais a  $1/2$  [28, 29].



### 4.3 Segundo momento: expoente de Hurst

Analisamos como  $H - 1/2$  comporta-se próximo a linha crítica entre difusão e superdifusão. Para  $p > 1/2$  o comportamento próximo a linha crítica satisfaz,

$$(H - H_c) = \frac{2}{f_c^{1-H_c} - \alpha_c \ln(f_c)} (p - p_c) \quad (4.11)$$

$$(H - H_c) = \frac{\alpha_c (1 - H_c)}{f_c^{2-H_c} - \alpha_c f_c \ln(f_c)} (f_c - f) , \quad (4.12)$$

onde podemos ver que ambos expoentes críticos são iguais a 1 (um).

O caso  $p < 1/2$  é mais difícil de resolver analiticamente. Porém, após alguma álgebra, podemos mostrar que  $H$  satisfaz,

$$(H - H_c) = \frac{y^{3/2} T' [(U) \tan^2(U) - \tan(U) + U] (p_c - p)}{y^2 \tan^2(U) - \alpha y^{5/2} U'} , \quad (4.13)$$

$$(H - H_c) = \frac{[T \tan^2(U) - b f_c \tan(U) + y^{1/2} T](f_c - f)}{y f_c \tan^2(U) - a' f_c y^{3/2} U'}, \quad (4.14)$$

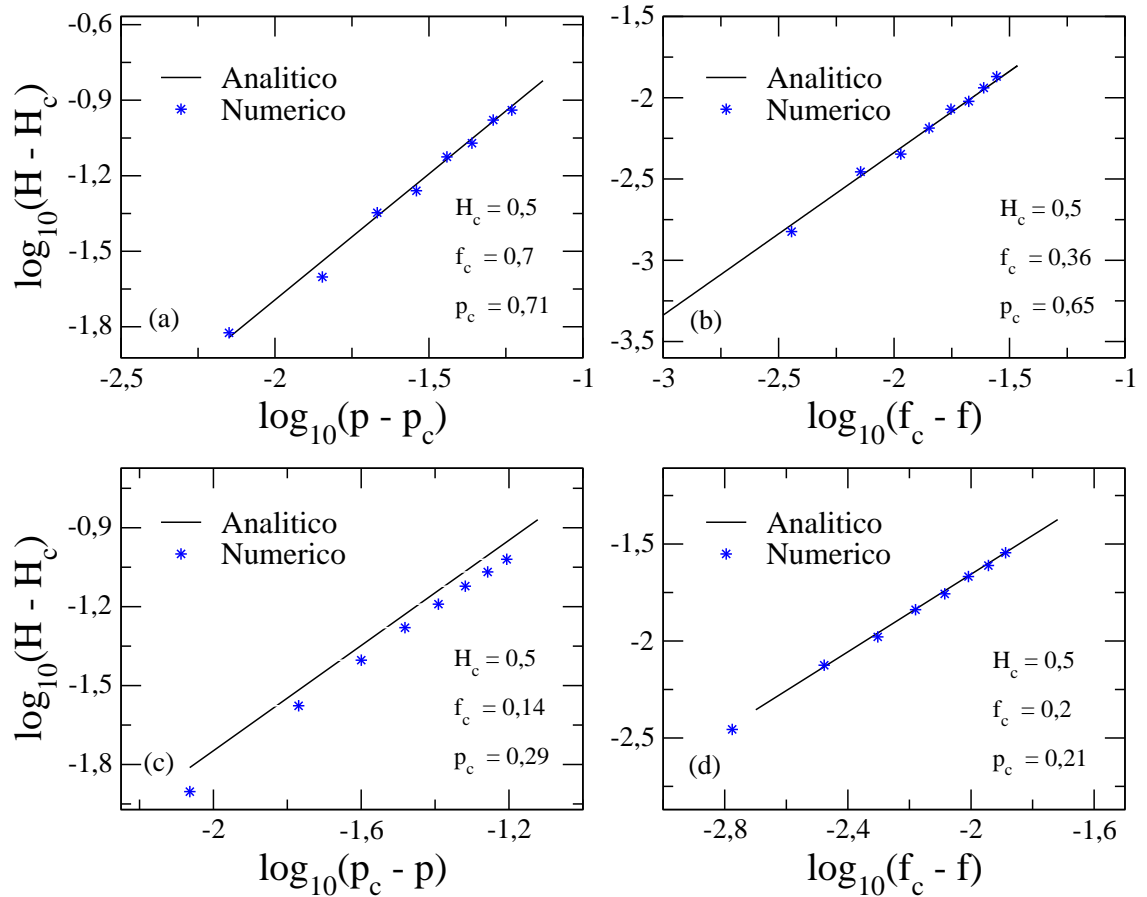
onde

$$\begin{aligned} y &= \alpha_c^2 f_c^{2H_c-2} - H_c^2 \\ a &= \frac{(\alpha_c^2 f_c^{2H_c-2} \ln(f_c) - H_c)}{y} \\ a' &= \frac{(\alpha_c^2 f_c^{2H_c-3} \ln(f_c) - H_c)}{y} \\ T &= y^{1/2} [b f_c \ln(f_c) + y] \\ T' &= 2\alpha_c f_c^{2H_c-2} \\ U &= y^{1/2} \ln(f_c) \\ U' &= \tan(U) - U \tan^2(U) - U \\ b &= \alpha_c^2 f_c^{2H_c-3} (H_c - 1). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Uma dedução mais detalhada destes cálculos pode ser acompanhado na seção 5.2 e 5.3 do capítulo 5.

Ambos expoentes críticos também valem um. A Figura (4.3) compara o comportamento estimado numericamente de  $H$  com os resultados analíticos. Neste caso, também encontramos uma boa concordância. As Figuras 4.3 (a) e (b) mostram o comportamento no ramo da linha crítica para  $p > 1/2$  (ou seja, transição difusão-superdifusão clássica), enquanto as Figuras 4.3(c) e (d) mostram o ramo da linha crítica para  $p < 1/2$  (i.e. transição difusão-superdifusão log-periódica).

Figura 4.3: Duplo log plot do parâmetro de ordem  $2H - 1$  versus  $|p_c - p|$  e  $f_c - f$  em (a) e (b) o ramo normal, e (c) e (d) o ramo log-periódico da linha crítica, obtida numericamente e analiticamente através das equações (4.11), (4.12), (4.13) e (4.14). Os expoentes críticos são todos iguais a 1 (um) [28, 29].



#### 4.4 Monofractalidade log-periódica

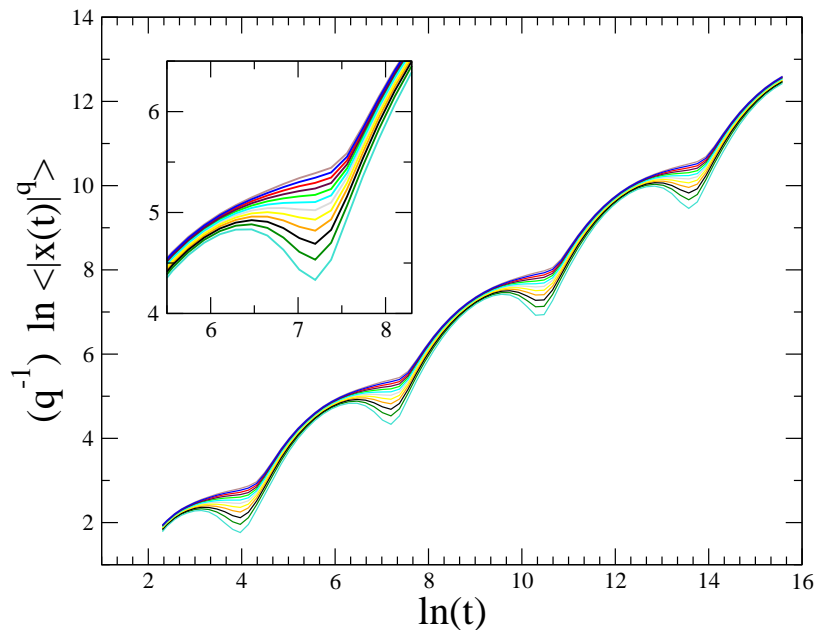
A princípio, a equação de Fokker-Planck Eq.(3.37), pode ser usada para obter o comportamento de qualquer momento  $\langle x^a \rangle$ , porém, sua solução analítica não é direta para altos momentos. Afim de eliminar a distinção entre momentos pares e momentos ímpares e permitir momentos fracionários para  $x$  negativo, nós estudamos

numericamente os momentos absolutos.

$$\langle |x(t)|^q \rangle \sim t^{qH(q)}, \quad (4.16)$$

onde  $H(q)$  significa o expoente de Hurst generalizado [8, 16, 57]. Se  $H(q)$  depende de  $q$  é dito que a caminhada é multifractal. De outro modo, ela é monofractal e simples expoentes descrevem a caminhada.

Figura 4.4: Duplo log de  $\langle |x(t)|^q \rangle^{1/q}$ , a  $q$ -ésima raiz dos  $q$ -ésimos momentos absolutos versus o tempo. Da parte inferior para a superior os valores são  $q = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0, 5.5$  e ( $p=0,1$ ,  $f=0,1$ ). O *inset* mostra um *zoom* de aproximadamente um log-período.  $H(q, t) = (1/q)(d/d \ln t) \ln \langle |x(t)|^q \rangle$  [28].



Na Figura (4.4) temos o crescimento dos momentos. Note a log-periodicidade, que indica leis de potência complexa. A relação entre expoentes complexos e log-periodicidade surgem do fato que leis de potencia complexa  $t^{a+ib}$  são iguais a  $t^a e^{ib \ln(t)}$ . Podemos assim, generalizar o conceito de monofractalidade ao incluir expoente com-



plexos. Se ambas as componentes, não-oscilatória e a log-periódica forem independentes de  $H(q)$  então a caminhada é monofractal, caso contrário é multifractal. Note como as oscilações log-periódicas variam de momento a momento.

A independência de múltiplas escalas está possivelmente relacionada a natureza uniforme da memória, ou seja, o mesmo peso é atribuído a todas as escalas. Usualmente, multifractalidade surge quando eventos de diferentes magnitudes pesam diferentemente, onde pequenos eventos possuem um papel diferente dos eventos maiores, e assim, mudando o expoente fractal para diferentes momentos. O comportamento é monofractal, pois a inclinação média é a mesma para todos os momentos (ou seja, a parte real do expoente de Hurst  $H(q)$ ) e os log-períodos também são idênticos (ou seja, a parte imaginária de  $H(q)$ ).

# Capítulo 5

## Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho, apresentamos um conjunto de formalismos importantes para o estudo de processos de difusão normal e anômala, através das equações de Langevin, Fokker-Planck, Mestra e Montroll-Weiss. Estudamos o comportamento das propriedades de escala de um sistema não-Markoviano, apresentando perda de memória do passado recente e distante. A derivação da equação de Fokker-Planck para sistemas não-Markovianos é raro na literatura científica e foi feito afim de obtemos expressões para o cálculo dos momentos da distribuição de probabilidade.

Derivamos resultados numéricos e analíticos exatos ao calcularmos seis expoentes críticos relacionados ao primeiro e ao segundo momento da função densidade de probabilidade. Juntos caracterizam a transição de fase. Encontramos que na região de *feedback* negativo ( $p < 1/2$ ) a transição do regime superdifusivo log-periódico para o regime difusivo log-periódico ocorre com expoente crítico igual a 1 (um). Na linha crítica  $f_0(p = 1/2)$  a transição entre os regimes difusivo log-periódico e difusivo clássico ocorre com expoente  $1/2$  (meio). No regime de *feedback* positivo ( $p > 1/2$ )

a transição entre os regimes difusivo clássico e superdifusivo clássico ocorre com expoente crítico igual a 1 (um). Os resultados numéricos e analíticos estão de acordo. Encontramos que o aparecimento súbito de comportamento repetitivo (persistência) não depende necessariamente da característica do *feedback*.

Analisamos as características desta caminhada aleatória não-Markoviana quanto a sua fractalidade. A investigação do expoente de Hurst ( $H$ ) quanto a sua dependência com expoentes generalizados ( $q$ ), mostrou que  $H$  não depende de  $q$ , significando portanto, que o processo é monofractal.

Notamos que este sistema tem possível relevância no estudo do mal de Alzheimer. Não apenas a condição de perda progressiva de lembranças do passado recente, mas também pelo aparecimento de comportamento repetitivo, é conhecido que pacientes com mal de Alzheimer agem como se seus cérebros estivessem confinado em padrões repetitivos sem fim. Como cantar melodias que parecem nunca terminar e falar as mesmas perguntas muitas vezes ao dia. É possível que talvez exista uma relação causal entre tal repetitividade e perda de lembrança recente provocada pelo mal de Alzheimer. Dessa maneira, faz-se necessário o aprofundamento desse estudo no sentido de aproximar estes resultados analíticos e numérico com dados reais obtidos por meios clínicos associados ao mal de Alzheimer.

O estudo de processos que apresentam log-periodicidade possui bastante potencial, tanto os que surgem por efeitos de retardo temporal, como os por perda de memória em *feedback* negativo, apresentados neste trabalho. Curiosamente, o comportamento apresentado por dados financeiros antes das bolsas de valores quebrar, é de log-periodicidade. A relação causal ainda é desconhecida e portanto seu estudo torna-se bastante motivado.

# Capítulo 6

## Apêndice

### 6.1 Frequências log-periódicas

Cálculo de  $B \sim (p - p_c)^\beta$ ,  $\beta = ?$

$$B = \alpha f^{[B/\tan(B \ln(f)) - 1]} \sin(B \ln f) . \quad (6.1)$$

A partir da Eq. (6.1) temos

$$\frac{Bf}{\sin(B \ln(f))} = \alpha f^{B/\tan(B \ln(f))} \quad (6.2)$$

Considerando a expansão do seno e da tangente, temos,

$$\frac{f}{\ln(f) - \frac{B^2 \ln^3(f)}{3!}} = \alpha f^{1/[\ln(f) + \frac{B^2 \ln^3(f)}{3}]} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{f}{\ln(f) \left[1 - \frac{B^2 \ln^2(f)}{3!}\right]} &= \frac{f}{\ln(f)} \left[1 + \frac{B^2 \ln^2(f)}{3!}\right] \\ &= \alpha f^{\frac{1}{\ln(f)}} \left[1 - \frac{B^2 \ln^2(f)}{3}\right] \end{aligned} \quad (6.4)$$

Para  $B_c = 0$  temos  $\alpha = \alpha_c$ , assim a seguinte relação é encontrada

$$\frac{f}{\ln(f)} = \alpha_c f^{1/\ln(f)} \quad (6.5)$$

Substituindo a Eq. 6.5 no termo antes da igualdade na Eq. 6.4, após alguma álgebra temos,

$$\begin{aligned} \alpha_c f^{1/\ln(f)} \left[1 + \frac{1}{3!} B^2 \ln^2(f)\right] &= \ln(\alpha_c) + 1 + \frac{1}{3!} B^2 \ln^2(f) \\ &= \alpha f^{\frac{1}{\ln(f)}} \left[1 - \frac{B^2 \ln^2(f)}{3}\right] \\ &= \ln(\alpha) + 1 - \frac{1}{3} B^2 \ln^2(f) \end{aligned} \quad (6.6)$$

na busca por  $\beta$ , temos  $f = f_c$  onde  $\ln(\alpha) = \ln(\alpha_c) + 2\epsilon/\alpha_c$  e com mais um pouco de álgebra.

$$B^2 = \frac{4}{\alpha_c \ln^2(f_c)} \epsilon. \quad (6.7)$$

Portanto o expoente crítico é  $\beta = 1/2$ .

**Cálculo de  $B \sim (f_c - f)^\delta$ ,  $\delta = ?$**

calculando  $\delta = ?$

Re-escrevendo a Eq. 6.3,

$$\frac{f_c}{\ln(f_c)} = \alpha_c f_c^{1/\ln(f_c)} \quad (6.8)$$

então calculamos  $\alpha$

$$\alpha_c = \frac{1}{\ln(f_c)} f_c^{\left[1 - \frac{1}{\ln(f_c)}\right]} \quad (6.9)$$

para substituírmos na Eq. 6.4

$$\frac{f}{\ln(f)} \left[ 1 + \frac{B^2 \ln^2(f)}{3!} \right] = \frac{1}{\ln(f_c)} f_c^{\left[1 - \frac{1}{\ln(f_c)}\right]} \left[ f^{\frac{1}{\ln(f)} \left[1 - \frac{B^2 \ln^2(f)}{3}\right]} \right] \quad (6.10)$$

Com mais alguma álgebra bonita

$$\ln(f) + \frac{B^2 \ln^2(f)}{3!} - \frac{\epsilon}{f_c \ln(f_c)} = \ln(f_c) - \frac{B^2 \ln^2(f_c)}{3} \quad (6.11)$$

e por fim chegamos numa expressão fechada para  $B$ .

$$B^2 = \frac{2}{f_c} \left( \frac{1}{\ln(f_c) - 1} \right) \frac{\epsilon}{\ln^2(f_c)} \quad (6.12)$$

Portanto o expoente crítico é  $\delta = 1/2$ .

## 6.2 Feedback negativo: $p < 1/2$

$$H = \frac{\sqrt{\alpha^2 f^{2H-2} - H^2}}{\tan \left[ \ln(f) \sqrt{\alpha^2 f^{2H-2} - H^2} \right]} . \quad (6.13)$$

Com base na equação 6.13, estamos interessados em saber como  $(H - H_c)$  escala com  $(p_c - p)$  e  $(f_c - f)$ .

**Cálculo de  $dH \sim (p_c - p)^\beta$ ,  $\beta = ?$**

$$H - H_c = \frac{\sqrt{\alpha^2 f_c^{2H-2} - H^2}}{\tan \left[ \ln(f_c) \sqrt{\alpha^2 f_c^{2H-2} - H^2} \right]} - \frac{\sqrt{\alpha_c^2 f_c^{2H_c-2} - H_c^2}}{\tan \left[ \ln(f_c) \sqrt{\alpha_c^2 f_c^{2H_c-2} - H_c^2} \right]} \quad (6.14)$$

considerando que  $\alpha = 2p - 1$  e  $p = p_c - \epsilon$ , temos  $\alpha^2 = \alpha_c^2 - 4\alpha_c\epsilon$ , assim,

$$H - H_c = \frac{\sqrt{(\alpha_c^2 - 4\alpha_c\epsilon) f_c^{2H-2} - H^2}}{\tan \left[ \ln(f_c) \sqrt{(\alpha_c^2 - 4\alpha_c\epsilon) f_c^{2H-2} - H^2} \right]} - \frac{\sqrt{\alpha_c^2 f_c^{2H_c-2} - H_c^2}}{\tan \left[ \ln(f_c) \sqrt{\alpha_c^2 f_c^{2H_c-2} - H_c^2} \right]} \quad (6.15)$$

onde  $\epsilon \ll 1$  e  $\epsilon^2 \rightarrow 0$ .

Calculando  $\sqrt{(\alpha_c^2 - 4\alpha_c\epsilon) f_c^{2H-2} - H^2}$ , através de uma expansão em série de Taylor.

$$\begin{aligned}
\sqrt{(\alpha_c^2 - 4\alpha_c\epsilon)f_c^{2H-2} - H^2} &= \sqrt{(\alpha_c^2 f_c^{2H-2} - H^2) - 4\alpha_c\epsilon f_c^{2H-2}} \\
&= (\alpha_c^2 f_c^{2H-2} - H^2)^{1/2} \left[ 1 - \frac{4\alpha_c f_c^{2H-2}}{(\alpha_c^2 f_c^{2H-2} - H^2)} \epsilon \right]^{1/2} \\
&= (\alpha_c^2 f_c^{2H-2} - H^2)^{1/2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{4\alpha_c f_c^{2H-2}}{(\alpha_c^2 f_c^{2H-2} - H^2)} \epsilon \right]
\end{aligned} \tag{6.16}$$

O termo  $(\alpha_c^2 f_c^{2H-2} - H^2)^{1/2}$  é resolvido fazendo  $H \rightarrow (H - H_c) + H_c$ , onde  $(H - H_c) \ll 1$  e  $(H - H_c)^2 \rightarrow 0$ .

$$f_c^{2(h-H_c)} = 1 + 2(H - H_c) \ln(f_c) \tag{6.17}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha_c^2 f_c^{2H-2} - H^2)^{1/2} &= (\alpha_c^2 f_c^{2H_c-2} - H_c^2)^{1/2} \left[ 1 + 2(H - H_c) \frac{\alpha_c f_c^{2H_c-2} \ln(f_c) - H_c}{\alpha_c^2 f_c^{2H_c-2} - H_c^2} \right]^{1/2} \\
&= (\alpha_c^2 f_c^{2H-2} - H_c^2)^{1/2} \left[ 1 + \frac{1}{2} 2(H - H_c) \frac{\alpha_c f_c^{2H_c-2} \ln(f_c) - H_c}{\alpha_c^2 f_c^{2H_c-2} - H_c^2} \right] \\
&= \sqrt{y} [1 + a(H - H_c)].
\end{aligned} \tag{6.18}$$

onde,

$$y = (\alpha_c^2 f_c^{2H_c-2} - H_c^2),$$

$$a = (\alpha_c^2 f_c^{2H_c-2} \ln(f_c) - H_c) / y,$$

$$f_c^{(H-H_c+H_c)-2} \approx f_c^{2H_c-2} f_c^{2(H-H_c)} = f_c^{2H_c-2} [1 + 2(H - H_c) \ln(f_c)].$$

Agora calculamos  $(2\alpha_c f_c^{2H-2}\epsilon)$ ,

$$\begin{aligned}
2\alpha_c f_c^{2H-2}\epsilon &= 2\alpha_c f_c^{2H_c-2} f_c^{2(H-H_c)} \epsilon \\
&= 2\alpha_c f_c^{2H_c-2} \epsilon
\end{aligned} \tag{6.19}$$

onde  $(H - H_c)\epsilon \rightarrow 0$ .



De volta a Eq.6.16

$$\begin{aligned}
 (\alpha_c^2 f_c^{2H-2} - H^2)^{1/2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{4\alpha_c f_c^{2H-2}}{(\alpha_c^2 f_c^{2H-2} - H^2)} \epsilon \right] &= y^{1/2} [1 + a(H - H_c)] \left[ 1 - \frac{2\alpha_c f_c^{2H_c-2} \epsilon}{y + 2ay(H - H_c)} \right] \\
 &= y^{1/2} [1 + a(H - H_c)] - \frac{2y^{1/2} \alpha_c f_c^{2H_c-2}}{y + 2ay(H - H_c)} \epsilon
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Fazendo uma nova substituição,  $U = y^{1/2} \ln(f_c)$ , assim,

$$H_c = \frac{\sqrt{\alpha_c^2 f_c^{2H_c-2} - H_c^2}}{\tan[\ln(f_c) \sqrt{\alpha_c^2 f_c^{2H_c-2} - H_c^2}]} = \frac{y^{1/2}}{\tan(U)}. \tag{6.21}$$

Agora, calculando a tangente.

$$\begin{aligned}
 \tan[\ln(f_c) \sqrt{\alpha_c^2 f_c^{2H_c-2} - H_c^2}] &= \tan \left\{ \ln(f_c) \left[ y^{1/2} (1 + a(H - H_c)) - \frac{2y^{1/2} \alpha_c f_c^{2H_c-2} \epsilon}{y + 2ay(H - H_c)} \right] \right\} \\
 &= \tan \left\{ [U + Ua(H - H_c)] - \frac{\ln(f_c) T \epsilon}{y[1 + 2a(H - H_c)]} \right\}
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

fazendo  $\tan(r \pm s) = \frac{\tan(r) \pm \tan(s)}{1 \mp \tan(r) \tan(s)}$ , sabendo que a expansão da tangente é dada por  $\tan(X) \approx X$  para  $X \ll 1$ , e após alguma álgebra,

$$\begin{aligned}
 \tan[\ln(f_c) \sqrt{\alpha_c^2 f_c^{2H_c-2} - H_c^2}] &= \tan \left\{ \overbrace{[U + Ua(H - H_c)]}^r - \overbrace{\frac{\ln(f_c) T \epsilon}{y[1 + 2a(H - H_c)]}}^s \right\} \\
 &= \frac{y \tan(U) [1 + 2a(H - H_c)] + y U a (H - H_c) - \ln(f_c) T \epsilon}{y [1 - U a (H - H_c) \tan(U)] + 2ay(H - H_c) + T \ln(f_c) \tan(U) \epsilon}
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

Agora substituímos na Eq. 6.15 para  $(H - H_c)$

$$H - H_c = \frac{y^{1/2}[1 + a(H - H_c)] - \frac{T\epsilon}{y[1+2a(H-H_c)]}}{\frac{y \tan(U)[1+2a(H-H_c)]+y'-\ln(f_c)T\epsilon}{y[1-Ua(H-H_c) \tan(U)]+2ay(H-H_c)+T \ln(f_c) \tan(U)\epsilon}} - \frac{y^{1/2}}{\tan(U)} \quad (6.24)$$

onde  $y' = yUa(H - H_c)$ , e reajustando  $T = y^{1/2}T'$  e  $T' = 2\alpha_c f_c^{2H_c - 2}$ .

E por fim, com mais alguma álgebra temos

$$(H - H_c) = \frac{y^{3/2}T'[U \tan^2(U) - \tan(U) + U]}{y^2 \tan^2(U) - ay^{5/2}[\tan(U) - U \tan^2(U) - U]} \epsilon, \quad (6.25)$$

onde  $\epsilon = p_c - p$ .

Portanto, obtemos o valor do expoente crítico,  $\beta = 1$ .

Cálculo de  $dH \sim (f_c - f)^\delta$ ,  $\delta = ?$

$$H - H_c = \frac{\sqrt{\alpha_c^2 f^{2H-2} - H^2}}{\tan \left[ \ln(f) \sqrt{\alpha_c^2 f^{2H-2} - H^2} \right]} - \frac{\sqrt{\alpha_c^2 f_c^{2H_c-2} - H_c^2}}{\tan \left[ \ln(f_c) \sqrt{\alpha_c^2 f_c^{2H_c-2} - H_c^2} \right]} \quad (6.26)$$

agora fazemos  $f = f_c - \epsilon$

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha_c^2 f^{2H-2} - H^2} &= \sqrt{\alpha_c^2 f_c^{2H-2} \left(1 - \frac{\epsilon}{f_c}\right)^{2H-2} - H^2} \\ &= \sqrt{\alpha_c^2 f_c^{2H-2} \left[1 - 2(H-1)\frac{\epsilon}{f_c}\right] - H^2} \\ &= \sqrt{\alpha_c^2 f_c^{2H-2} - H^2} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{2\alpha_c^2 f_c^{2H-3}(H-1)}{\alpha_c^2 f_c^{2H-2} - H^2} \epsilon\right] \end{aligned} \quad (6.27)$$

Considerando que

$$H^2 = H_c^2 + 2(H - H_c)H_c \quad (6.28)$$

vamos calcular  $\sqrt{\alpha_c^2 f_c^{2H-2} - H^2}$

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha_c^2 f_c^{2H-2} - H^2} &= \sqrt{\alpha_c^2 f_c^{2H_c-2} [1 + 2(H - H_c) \ln(f_c)] - [H_c^2 + 2(H - H_c)H_c]} \\ &= \sqrt{(\alpha_c^2 f_c^{2H_c-2} - H_c^2) + 2(H - H_c)[\alpha_c^2 f_c^{2H_c-2} \ln(f_c) - H_c]} \\ &= (\alpha_c^2 f_c^{2H_c-2} - H_c^2)^{1/2} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{2\alpha_c^2 f_c^{2H_c-2} \ln(f_c) - H_c}{\alpha_c^2 f_c^{2H_c-2} - H_c^2} (H - H_c)\right] \end{aligned} \quad (6.29)$$

Voltando a Eq. 6.27, nós a re-escrevemos

$$\sqrt{\alpha_c^2 f_c^{2H-2} - H^2} = (\alpha_c^2 f_c^{2H_c-2} - H_c^2)^{1/2} \left\{ 1 + \left[ \frac{\alpha_c^2 f_c^{2H_c-2} \ln(f_c) - H_c}{\alpha_c^2 f_c^{2H_c-2} - H_c^2} \right] (H - H_c) - \frac{\alpha_c^2 f_c^{2H_c-3} (H_c - 1) \epsilon}{(\alpha_c^2 f_c^{2H_c-2} - H_c^2) + 2(H - H_c)[\alpha_c^2 f_c^{2H_c-2} \ln(f_c) - H_c]} \right\} \quad (6.30)$$

Calculando  $\ln(f) \sqrt{\alpha_c^2 f_c^{2H-2} - H^2}$ :

Fazendo a seguinte aproximação para o logaritmo,

$$\ln(f_c - \epsilon) = \ln(f_c) - \frac{\epsilon}{f_c} \quad (6.31)$$

Da Eq. 6.27 temos,

$$\begin{aligned} \left[ \ln(f_c) - \frac{\epsilon}{f_c} \right] \sqrt{\alpha_c^2 f_c^{2H-2} \left( 1 - \frac{\epsilon}{f_c} \right)^{2H-2} - H^2} &= y^{1/2} \ln(f_c) \left[ 1 + a(H - H_c) - \frac{b\epsilon}{y + 2(H - H_c)ay} \right] - \\ &\quad \frac{\epsilon}{f_c} y^{1/2} \left[ 1 + a(H - H_c) - \frac{b\epsilon}{y + 2(H - H_c)ay} \right] \\ &= y^{1/2} \ln(f_c) + ay^{1/2} \ln(f - c)(H - H_c) - \frac{by^{1/2} \ln(f_c) \epsilon}{y + 2ay(H - H_c)} - \frac{y^{1/2}}{f_c} \epsilon \end{aligned} \quad (6.32)$$

onde  $b = \alpha_c^2 f_c^{2H_c-3} (H_c - 1)$ .

Substituindo na Eq. 6.26 e com mais alguma álgebra encontramos,

$$H - H_c = \frac{y[1+2a(H-H_c)]+ay(H-H_c)-b\epsilon}{y^{1/2}[1+2a(H-H_c)]} - \frac{y^{1/2}}{\tan(U)} \quad (6.33)$$

$$\frac{yf_c \tan(U) + ayf_c(H-H_c)[2 \tan(U) + U] - T\epsilon}{ayf_c(H-H_c)[2 - U \tan(U)] + yf_c + T\epsilon \tan(U)}$$

e por fim, com mais alguma álgebra,

$$(H - H_c) = \frac{[\tan^2(U)T - bf_c \tan(U) + y^{1/2}T]\epsilon}{\tan^2(U)yf_c - y^{3/2}af_c[\tan(U) - U \tan^2(U) - U]} \quad (6.34)$$

onde  $\epsilon = f_c - f$ .

Portanto é obtido que o expoente é  $\delta = 1$ .

### 6.3 Feedback positivo: $p > 1/2$

Cálculo de  $dH \sim (dp)^\beta$ ,  $\beta = ?$

$$H = \alpha f^{H-1} . \quad (6.35)$$

Nesta operação  $f = f_c$  será sempre constante. Então re-escrevemos a Eq.6.35

$$H = \alpha f_c^{H-1} , \quad (6.36)$$

O termo crítico é dado por,

$$H_c = \alpha_c f_c^{H_c-1} , \quad (6.37)$$

agora calculamos  $(H - H_c)$ ,

$$\begin{aligned} (H - H_c) &= \alpha f_c^{H-1} - \alpha_c f_c^{H_c-1} \\ &= f_c^{H_c-1} [\alpha f_c^{(H-H_c)} - \alpha_c]. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Fazendo a seguinte expansão

$$\begin{aligned} f_c^{(H-H_c)} &= e^{(H-H_c)\ln(f_c)} \\ &= 1 + (H - H_c) \ln(f_c). \end{aligned} \quad (6.39)$$

Então, voltando a Eq. 6.38

$$\begin{aligned}(H - H_c) &= f_c^{H_c-1} \{ \alpha [1 + (H - H_c) \ln(f_c)] - \alpha_c \} \\ &= f_c^{H_c-1} [ \alpha - \alpha_c + \alpha (H - H_c) \ln(f_c) ],\end{aligned}\quad (6.40)$$

Isolando  $(H - H_c)$  teremos

$$(H - H_c) = \frac{2\Delta p}{f_c^{(1-H_c)} - \alpha \ln(f_c)}.\quad (6.41)$$

No entanto, note que um termo que depende de  $p$  permanece na expressão.

Então faz-se uma nova substituição  $\alpha - \alpha_c = 2(p - p_c) \rightarrow \alpha = \alpha_c + 2\epsilon$ , logo

$$\begin{aligned}(H - H_c) &= \frac{2\Delta p}{f_c^{(1-H_c)} - (\alpha_c + 2\epsilon) \ln(f_c)} \\ &= \frac{2\Delta p}{[f_c^{(1-H_c)} - \alpha_c \ln(f_c)] \left[ 1 - \frac{2\ln(f_c)\epsilon}{f_c^{(1-H_c)} - \alpha_c \ln(f_c)} \right]} \\ &\sim \frac{2\Delta p}{f_c^{(1-H_c)} - \alpha_c \ln(f_c)}.\end{aligned}\quad (6.42)$$

Assim, obtemos que  $\beta = 1$ .

**Cálculo de  $dH \sim (df)^\delta$ ,  $\delta = ?$**

$$H = \alpha_c f^{H-1}\quad (6.43)$$

A equação para  $H_c$  é dada por 6.37, então

$$\begin{aligned}
(H - H_c) &= \alpha_c f^{H-1} - \alpha_c f_c^{H_c-1} \\
&= \alpha_c [f^{H-1} - f_c^{H_c-1}] \\
&= \alpha_c \left[ f_c^{H-1} \left(1 - \frac{\epsilon}{f_c}\right)^{H-1} - f_c^{H_c-1} \right] \\
&= \alpha_c f_c^{H_c-1} \left[ f_c^{(H-H_c)} \left(1 - \frac{\epsilon}{f_c}\right)^{H-1} - 1 \right] \\
&= \alpha_c f_c^{H_c-1} \left\{ \left[1 + (H - H_c) \ln(f_c)\right] \left(1 - \frac{\epsilon}{f_c}\right)^{H-1} - 1 \right\} \quad (6.44)
\end{aligned}$$

isolando  $(H - H_c)$ , temos

$$\begin{aligned}
(H - H_c) &= \frac{\alpha_c(1 - H)\epsilon/f_c}{f_c^{1-H_c} - \alpha_c \ln(f_c)(1 - \epsilon/f_c)} \\
&= \frac{\alpha_c(1 - H)\epsilon}{[f_c^{2-H_c} - \alpha_c f_c \ln(f_c)] + \alpha_c \ln(f_c)(H - 1)\epsilon} \\
&= \frac{\alpha_c(1 - H)\epsilon}{f_c^{2-H_c} - \alpha_c f_c \ln(f_c)} \left[ 1 + \frac{\alpha_c \ln(f_c)(H - 1)\epsilon}{f_c^{2-H_c} - \alpha_c f_c \ln(f_c)} \right]^{-1} \quad (6.45)
\end{aligned}$$

com mais alguma álgebra chegamos a uma expressão que depende de  $H$

$$H - H_c = \frac{\alpha_c(1 - H)\epsilon}{f_c^{2-H_c} - \alpha_c f_c \ln(f_c)} \quad (6.46)$$

substituindo  $H \rightarrow (H - H - c) + H_c$ , onde  $(H - H_c)\epsilon \rightarrow 0$ , temos

$$H - H_c = \frac{\alpha_c(1 - H_c)\epsilon}{f_c^{2-H_c} - \alpha_c f_c \ln(f_c)} \quad (6.47)$$

logo,  $\delta = 1$ .



# Referências Bibliográficas

- [1] Einstein A., *Annalen der Physik*. **17**, 549, (1905).
- [2] Silvio R. A. Salinas., *Einstein e a teoria do movimento Browniano*. *Revista Brasileira de Ensino de Física*. **27**, 2, 263 (2005).
- [3] Bachelier L., *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*. **17**, 21, (1900).
- [4] Stanley H. E., *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*. (Publisher, Oxford University Press, Oxford and New York), (1971).
- [5] Mandelbrot B. B., *The Fractal Geometry of Nature*. (Publisher, Freeman W.H. and Co, New York), (1982).
- [6] Stanley H. E., Amaral L. A. N., Buldyrev S. V., Goldberger A. L., Havlin S., Leschhorn H., Maass P., Makse H., Peng C.-K., Salinger M. A., Stanley M. H. R., and Viswanathan G. M., *Physica A*, **231**, (1996).
- [7] Barabási A. L. and Stanley H. E., *Fractal Concepts in Surface Growth*. (Publisher, Cambridge University Press, Cambridge), (1995).
- [8] Feder J. *Fractals*. (Publisher, Plenum Press, New York), (1988).

- [9] Viswanathan G. M., da Luz M. G. E., Raposo E. P., and Stanley H. E., *The Physics of Foraging: An Introduction to Random Searches and Biological Encounters*. Editora, Cambridge University Press, (2011).
- [10] Kerson Huang, *Statistical Mechanics*, (Publisher, John Wiley, 2ª ED. ISBN 0471815187), (1987).
- [11] Viswanathan G. M., Afanasyev V., Buldyrev S. V., Murphy E. J., Prince P. A., Stanley H. E., *Lévy search patterns of wandering albatrosses*. Nature. **381**, (1996).
- [12] Viswanathan G. M., Buldyrev S. V., Havlin S., da Luz M. G. E., Raposo E., and Stanley H. E., Nature. **401**, (1999).
- [13] Kareiva, P. M. and N. Shigesada., *Analyzing insect movement as a correlated random walk*. Oecologia. **56**, 234, (1983).
- [14] Shlesinger M. F., West B. J., Klafter J., *Lévy Dynamics of Enhanced Diffusion: Application to Turbulence*. Physical Review Letters. **58**, 11, (1987).
- [15] Hughes B. D., Shlesinger M. F. and Montroll E. W., *Random walks with self-similar clusters*, Proc. Natl Acad. Sci. USA., **78**, 6, 3287-3291, (1981).
- [16] Mantegna R. N. and Stanley H. E., *An Introduction to Econophysics*. (Publisher Cambridge Univ. Press, Cambridge), (2000).
- [17] Hurst H. E., Black R. P., and Simaika Y. M., *Long-Term Storage: An Experimental Study* (Publisher, Constable, London), (1965).

- [18] A. Blumen, J. Klafter and B. S. White G. Zumofen *Continuous-Time Random Walks on Fractals*. Phys. Rev. Lett. **53**, 14, (1984).
- [19] Zumofen G., Klafter J., *Scale-invariant motion in intermitent chaotic systems*. Phys. Rev. E. **47**, 2 (1993).
- [20] Ralf Metzler and Joseph Klafter , *The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics*. J. Phys. A: Math. Gen. **37**, R161–R208, (2004).
- [21] Silvio R. A. Salinas., *Introdução a Física Estatística*. (Editora, EdUSP, 2ª Ed., ISBN 8531403863), (2005).
- [22] Tânia T., Oliveira M. J., *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade*, (Editora, EdUSP., 1ª ED. ISBN 8531405955), (2001)
- [23] Sornette D., Proc. Nat. Acad. Sci. **99**, 2522, (2002).
- [24] Sornette D., *Discrete scale invariance and complex dimensions*. arXiv:cond-mat/9707012v2 [cond-mat.stat-mech], (1998).
- [25] Bartumeus F., Catalan J., Fulco U. L., Lyra M. L., Viswanathan G. M., Physical Review Letters. **88**, (2002).
- [26] Raposo E. P., Buldyrev S. V., da Luz M. G. E., Santos M. C., Stanley H. E. and Viswanathan G. M., Physical Review Letters **91**, (2003).
- [27] Viswanathan G. M., Raposo E., Bartumeus F., Catalan J., and da Luz M. G. E., *Necessary criterion for distinguishing true superdiffusion from correlated random walk processes*. Phys. Rev. E. **72**, 011111, (2005).

- [28] Felisberto M.L., Passos F.S., Ferreira A.S., da Silva M.A.A., Cressoni J.C. and Viswanathan G.M., *Sudden onset of log-periodicity and superdiffusion in non-Markovian random walks with amnestically induced persistence: exact results*. Eur. Phys. J. B, **72**, 427–433, (2009).
- [29] Felisberto M. L., Arlan A. S., da Silva M. A. A., Cressoni J. C., and Viswanathan G. M. *Exact critical exponents and Fokker-Planck equation for the non-Markovian Alzheimer walk*. Book of Abstracts: Perspectives and Challenges in Statistical Physics and Complex Systems for the Next Decade: A Conference in Honor of Eugene Stanley and Liacir Lucena, Natal–RN, Brazil, November, 09-11, (2011).
- [30] Linda E. Reichl., *A modern Course in Statistical Physics*. (Published, John Wiley Professio, 2<sup>a</sup> Ed.), (1998).
- [31] S. Rao Jammalamadaka, Srikanth K. Iyer. *A simple estimate of the index of stability for symmetric stable distributions*.
- [32] Shlesinger M. F., Zaslavsky G. M. and Frisch U., *Lévy flights and related topics in physics*. (Publisher, Springer, Berlin), (1995).
- [33] Reif F. *Fundamentals Of Statistical And Thermal Physics*. (Publisher, International Students Edition. McGRAW-HILL Book Company. KOGAKUSHA Company, LTD. Tokyo). (1965).
- [34] Pathria R. K., *Statistical Mechanics*, (Publisher, Butterworth, 2<sup>a</sup>ED., ISBN 9780750624695), (1996).

- [35] Risken H. *The Fokker-Planck equation: Methods of Solutions and Applications*. (Publisher, Springer-Verlag. Second Edition. Series in synergetics). (1989).
- [36] van Kampen N. G., *Remarks on Non-Markov Processes*. Brazilian Journal of Physics., **28**, 2, (1998).
- [37] Vladimir V. Uchaikin, Vladimir M. Zolotarev. *Chance and Stability: Stable Distributions and their Applications*. ©VPS, (1999).
- [38] Vladimir V. Uchaikin. *Montroll-Weiss Problem, Fractional Equations, and Stable Distributions*. International Journal of Theoretical Physics, **39**, 8, (2000).
- [39] Fátima D. P. Lima, Jorge M. A. Garcia and Alfredo D. Egídio dos Reis. *Fourier-Laplace Transforms and Ruin Probabilities*. Astin Bulletin, **32**, 1, 91-105, (2002).
- [40] Loukas Vlahos, Heinz Isliker, Yannis Kominis and Kyriakos Hizanidis., *Normal and Anomalous Diffusion: A Tutorial*. Preprint submitted to Elsevier. (2008).
- [41] Alonso M., Finn E. J., *Um Curso Universitário*. (Publisher, Edgard Blücher), **2**, Campos e Ondas, (2004).
- [42] <http://en.wikipedia.org/wiki/Molecular-diffusion>.
- [43] Constatino Tsallis. *As Distribuições de Levy*. Rev. Bras. de Ens. de Física, **22**, 2, (2000).
- [44] Bartumeus F., Catalan J., Viswanathan G. M., Raposo E., and da Luz M. G. E., *The role of turning angle distributions in animal search strategies*, Journal of Theoretical Biology, **252**, 43-55, (2008).

- [45] Bartumeus F., da Luz M. G. E., Viswanathan G. M., Catalan J., *Animal Search Strategies: A quantitative random walk analysis*. Ecology. **86**, 11, 3078, (2005).
- [46] Faustino, C. L., da Silva, L. R., da Luz, M. G. E., Raposo, E. P., Viswanathan, G. M., *Search dynamics at the edge of extinction: Anomalous diffusion as a critical survival state*. Europhysics Letters, **77**, 30002, (2007).
- [47] Bénichou O., Loverdo C., Moreau M. and Voituriez R. *Two-dimensional intermittent search processes: An alternative to Lévy flight strategies*. Physical Review E, **74**, 020102(R), (2006).
- [48] Felisberto M. L., da Luz M. G. E., Bartumeus F., Raposo E. P., and Viswanathan G. M. Correlated Lévy Walk. In Abstracts book of the Latin American Workshop on Nonlinear Phenomena, Búzios, 05-09 October. Curitiba-PR, Brazil: Editora Universidade Federal do Paraná, p.27, (2009).
- [49] Gonçalves G., Lenzi M. K., Moraes L. de S., Lenzi E. K. e Andrade M. F., *Difusão anômala e equações fracionárias de difusão*. Acta Sci. Technol. **27**, 2, 123-131, (2005).
- [50] Isabel Tamara. *Estudos em Difusão Anômala*, Tese de Doutorado, Univ. Federal de Maringá, (2003).
- [51] Schütz G. M. and Trimper S., Phys. Rev. E, **70**, 045101, (2004).
- [52] da Silva M. A. A., Cressoni J. C., and Viswanathan G. M., Physica A **364**, 70, (2006).
- [53] Cressoni J. C., da Silva M. A. A., and Viswanathan G. M., *Amnestically Induced Persistence in Random Walks*. Phys. Rev. Lett. **98**, 070603, (2007).

- [54] da Silva M. A. A., Viswanathan G. M., Ferreira A. S. and Cressoni J. C., *Spontaneous symmetry breaking in amnestically induced persistence*, Physical Review E **77**, 040101(R), (2008).
- [55] Kenkre V. M., *Analytic Formulation, Exact Solutions, and Generalizations of the Elephant and the Alzheimer Random Walks*, arXiv: 0708.0034v2 (6 Aug 2007).
- [56] Kenkre V. M., *Statistical Mechanics and Statistical Methods in Theory and Application* (Publisher, Edited by Landman U., Plenum, New York), 441., (1977).
- [57] Bunde A. and Havlin S., *Fractals and Disordered Systems* (Publisher, Springer, Berlin, (1991).
- [58] Bruce J. West and William D. Deering, *The Lure of Modern Science: Fractal Thinking* (Publisher, World Scientific, Singapore), (1995).
- [59] Serva M., Fulco, U. L., Gléria, I. M., Lyra, M. L., Petroni, F. and Viswanathan, G. M., *Physica A*. **363**, 393, (2006).
- [60] Enrico Scalas. *The application of continuous-time random walks in finance and economics*. *Physica A*. **362**, 225-239, (2006).
- [61] Jennings H. D., Ivanov P. Ch., Martins A. M. Silva P. C. and Viswanathan G. M., *Physica A* **336**, 585, (2004).